Matematik
Chalmers tekniska högskola 2017-04-11

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097 Plats och tid: Johanneberg, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

*För att vara tydlig har jag använt · för skalärprodukt och * för multiplikation i alla uppgifter nedan.*

---

1 Denna uppgift omfattar 15 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar**.

2 Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(a) Visa att $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. (4p)

(b) Använd resultaten från 2(a) för att beräkna $\boldsymbol{A}^{10}$. (2p)

(a) $\boldsymbol{A}$ har egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$ (se uppgift 1(a)). Egenvektor $\boldsymbol{u}_1$ till λ_1 fås genom att lösa ekvationssystemet $(\boldsymbol{A} - 2 * \boldsymbol{I}) * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$$(\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 2 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -8 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

med lösning $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} * t, t \in \mathbb{R}$. Om vi väljer $t = 1$ får vi egenvektorn $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Analogt fås egenvektor $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ till $\lambda_2 = -1$. Låt

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi ska visa att $\boldsymbol{S}^{-1} * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}$. Vi har $\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (uppgift 1(b)) och

$$\boldsymbol{S}^{-1}*\boldsymbol{A}*\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Vi har att $\boldsymbol{D}^{10} = \boldsymbol{S}^{-1} * \boldsymbol{A}^{10} * \boldsymbol{S}$, dvs $\boldsymbol{A}^{10} = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{D}^{10} * \boldsymbol{S}^{-1}$.

$$\boldsymbol{D}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dvs

$$\boldsymbol{A}^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{bmatrix}$$

---

3 (a) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller linjen (3p)

$$l_1 : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

och som är parallellt med linjen

$$l_2 : \frac{x+1}{3} = y - 1 = \frac{z-2}{2}$$

(b) Bestäm avståndet mellan punkten $P = (1, 0, 3)$ och planet π. (3p)

(c) Bestäm avståndet mellan linjerna l_1 och l_2. (4p)

(a) Riktningsvektorer för l_1 och l_2 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Det sökta planets normalvektor $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ska vara ortogonal mot $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, dvs

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \\ 3n_1 + n_2 + 2n_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

dvs $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$. Längden på normalvektorn är inte relevant, så låt $t = 1$, vi får $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och planet $\pi = -x + y + z = D$.

$(0, -1, 1) \in l_1 \Rightarrow (0, -1, 1) \in \pi$, dvs $D = 0 - 1 + 1 = 0$, planets ekvation blir

$$-x + y + z = 0$$

(b) π har normalvektor $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $||\boldsymbol{n}|| = \sqrt{3}$.

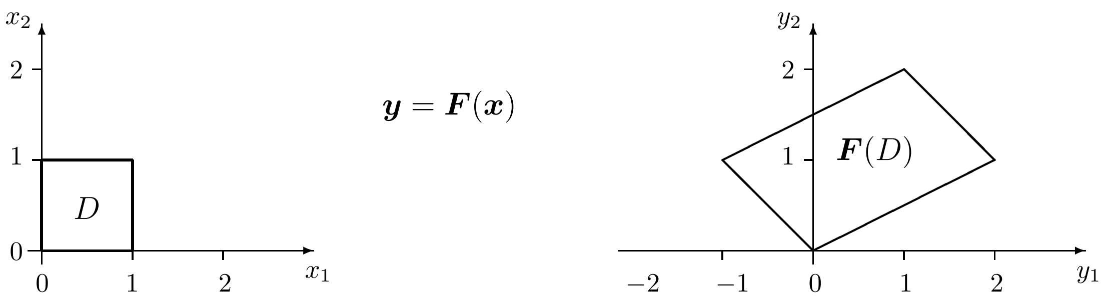
Låt Q vara den punkt i planet där $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot planet, vi har $Q = P + t * \boldsymbol{n}$, dvs $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 3+t \end{bmatrix}$. Eftersom Q ligger i planet har vi

$$-(1-t) + t + 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = -2/3.$$

Avståndet $||\overrightarrow{PQ}|| = ||t * \boldsymbol{n}|| = |2/3|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(c) Avståndet $4\sqrt{3}$

4(a) Betrakta den linjära avbildningen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ som beskrivs av bilden nedan.



Ange standardmatrisen $\boldsymbol{A}$ för avbildningen. (3p)

(b) Är avbildningen i **(a)** omvändbar? Dvs. finns $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})$? I så fall, vilken standardmatris har den? (3p)

(c) Translationen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$ med $\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är en affin avbildning. Beskriv denna med matrismultiplikation. (3p)

(d) Är avbildningen i **(c)** omvändbar? Om så är fallet, beskriv den med matrismultiplikation. (2p)

(a) Vi har

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{så} \ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1) \ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Avbildningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})$ har standardmatrisen

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Med en extra koordinat kan vi bilda

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Vi har

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

5 En $n \times n$ matris $\boldsymbol{D}$ kallas för positivt definit om $\boldsymbol{D}$ är symmetrisk (dvs $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^T$) och om $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} > 0$ för alla $n \times 1$ vektorer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

(a) Låt $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Visa att $\boldsymbol{D}$ *inte* är positivt definit. (3p)

(b) Låt

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

vara en $n \times n$ diagonalmatris. Visa att $\boldsymbol{D}$ är positivt definit bara om alla diagonalelementen $d_i > 0$. (4p)

(c) Antag att $\boldsymbol{D}$ är en $n \times n$ positivt definit diagonalmatris. Vilken rang har då matrisen. Motivera ditt svar. (2p)

(a) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = -5x_1^2 + 5x_2^2$

och $-5x_1^2 + 5x_2^2 < 0$ för tex $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$ som är > 0 för alla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ bara om alla $d_i > 0$

(c) Rang n. Eftersom $\boldsymbol{D}$ är positivt definit är alla diagonalelementen nollskilda, dvs det finns ett pivotelement i varje kolonn i $\boldsymbol{D}$.

---

1 (a) Bestäm alla egenvärden till $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Bestäm lösningar till den karakteristiska ekvationen: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda * \boldsymbol{I}) = 0$.

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda * \boldsymbol{I}) = \det(\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{bmatrix}) =$$

$$(5-\lambda) * (-4-\lambda) + 3 * 6 = -2 - \lambda + \lambda^2$$

som har lösning $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

(b) Bestäm inversen till $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Gausseliminera totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Vi får $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns av vektorerna (2p)

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lösning:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 18$$

(d) Låt $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - \dfrac{2}{\boldsymbol{u}^T * \boldsymbol{u}} * \boldsymbol{u} * \boldsymbol{u}^T$. (3p)

Lösning:

$$\boldsymbol{u}^T * \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \text{ och } \boldsymbol{u} * \boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} * \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning och $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}$ med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$ där $\boldsymbol{n}$ är normalen till linjen $k * x + y = 0$ och $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Beräkna bilden av triangeln med hörnen i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lösning:

$$f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{n}, \text{ och } f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$