Symboliska beräkningar med Matlab
Linjär algebra

1 Inledning

Den här laborationen är helt frivillig att göra och behöver inte redovisas. Sist i häftet finns lösningar till uppgifterna.

Verktygslådan Symbolic Math Toolbox i Matlab kan utföra symboliska beräkningar. Nu skall vi se på några symboliska beräkningar inom linjär algebra.

2 Linjära ekvationssystem

Vi löser det linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi skriver in $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ med funktionen `sym` som gör att talen lagras som rationella tal.

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]

>> b=sym([8; 13])
b =
  8
 13
```

Vi gör `rref` exakt med

```
>> rref([A b])
ans =
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 2]
```

och läser av lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan också lösa exakt med backslash-kommandot (\)

```
>> x=A\b
x =
 1
 2
```

Vi kontrollerar att ekvationssystemet är uppfyllt med

```
>> r=A*x-b
r =
 0
 0
```

Vi kan också ha ett helt symboliskt ekvationssytem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

```
>> syms a b c d
>> A=[a b; c d]
A =
[ a, b]
[ c, d]

>> syms e f
>> b=[e; f]
b =
 e
 f

>> x=A\b
x =
 -(b*f - d*e)/(a*d - b*c)
   (a*f - c*e)/(a*d - b*c)
```

Notera att vi får division med noll om matrisen är singulär, dvs. om $\det(\mathbf{A}) = 0$.

```
>> det(A)
ans =
a*d - b*c
```

Vi ser på residualen med

```
>> r=simplify(A*x-b)
r =
 0
 0
```

Här använde vi `simplify` för att få ett förenklat uttryck. Pröva gärna `r=A*x-b` själva för att se hur det annars ser ut.

Uppgift 1.
Under konstruktion.

Vi kan beräkna inversen $\mathbf{A}^{-1}$ av en matris $\mathbf{A}$ enligt

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]

>> B=inv(A)
B =
[ -4/7,  3/7]
[  5/7, -2/7]

>> A*B
ans =
[ 1, 0]
[ 0, 1]
```

Vi ser att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ som förväntat. Kontrollera gärna att även $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Uppgift 2. Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Beräkna en formel för $\mathbf{A}^{-1}$.

Uppgift 3. Vi ser på rotationsmatrisen

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Beräkna $\mathbf{A}_\phi^2 = \mathbf{A}_\phi \mathbf{A}_\phi$ som motsvarar en rotation med vinkeln 2ϕ. Stämmer det, är $\mathbf{A}_\phi^2 = \mathbf{A}_{2\phi}$? Beräkna sedan $\mathbf{A}_\phi^{-1}$. Vad är motsvarande rotation?

3 Nollrum och kolonnrum

Vi beräknar nollrummet $\mathrm{Nul}(\mathbf{A})$ och kolonnrummet $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ till en matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([-3  6 -1  1 -7
           1 -2  2  3 -1
           2 -4  5  8 -4])
A =
[ -3,  6, -1,  1, -7]
[  1, -2,  2,  3, -1]
[  2, -4,  5,  8, -4]

>> N=null(A)
N =
```

```
[  2,  1, -3]
[  1,  0,  0]
[  0, -2,  2]
[  0,  1,  0]
[  0,  0,  1]

>> R=colspace(A)
R =
[    1,    0]
[    0,    1]
[  1/5, 13/5]
```

Vi har alltså $\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ där

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Uppgift 4. Använd `rref` på matrisen $\mathbf{A}$ ovan, för att själv bestämma nollrum och kolonnrum.

4 Egenvärdesproblem

Vi löser egenvärdesproblemet $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([2 3 1; 5 4 6; 1 0 2])
A =
[ 2, 3, 1]
[ 5, 4, 6]
[ 1, 0, 2]

>> [V,D]=eig(A)
V =
[ -2,     2 - 2*3^(1/2),     2*3^(1/2) + 2]
[  1, 5 - (8*3^(1/2))/3, (8*3^(1/2))/3 + 5]
[  1,                 1,                 1]
```

```
D =
[ 0,              0,              0]
[ 0, 4 - 2*3^(1/2),              0]
[ 0,              0, 2*3^(1/2) + 4]
```

Får alltså egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_{2,3} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 5+\frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2-2\sqrt{3} \\ 5-\frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Lösningar till uppgifterna

Uppgift 2.

```
>> syms a b c d
>> A=[a b; c d]
[ a, b]
[ c, d]

>> C=inv(A)
C =
[  d/(a*d - b*c), -b/(a*d - b*c)]
[ -c/(a*d - b*c),  a/(a*d - b*c)]

>> (a*d-b*c)*C
ans =
[  d, -b]
[ -c,  a]
```

Alltså har vi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Uppgift 3.

```
>> syms v
>> A=[cos(v) -sin(v); sin(v) cos(v)]
A =
[ cos(v), -sin(v)]
[ sin(v),  cos(v)]

>> A2=A*A
A2 =
[ cos(v)^2 - sin(v)^2,    -2*cos(v)*sin(v)]
```

```
[     2*cos(v)*sin(v), cos(v)^2 - sin(v)^2]

>> B=[cos(2*v) -sin(2*v); sin(2*v) cos(2*v)]
B =
[ cos(2*v), -sin(2*v)]
[ sin(2*v),  cos(2*v)]

>> A2=simplify(A2)  % Förenkling av A^2
A2 =
[ cos(2*v), -sin(2*v)]
[ sin(2*v),  cos(2*v)]
```

Alltså har vi $\mathbf{A}_\phi^2 = \mathbf{A}_{2\phi}$.

```
>> C=inv(A)
C =
[  cos(v)/(cos(v)^2 + sin(v)^2), sin(v)/(cos(v)^2 + sin(v)^2)]
[ -sin(v)/(cos(v)^2 + sin(v)^2), cos(v)/(cos(v)^2 + sin(v)^2)]

>> C=simplify(C)
C =
[  cos(v), sin(v)]
[ -sin(v), cos(v)]
```

Alltså har vi $\mathbf{A}_\phi^{-1} = \mathbf{A}_{-\phi}$ eftersom

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{-\phi}$$

Uppgift 4.

```
>> A=sym([-3  6 -1  1 -7
           1 -2  2  3 -1
           2 -4  5  8 -4])
A =
[ -3,  6, -1, 1, -7]
[  1, -2,  2, 3, -1]
[  2, -4,  5, 8, -4]

>> rref(A)
ans =
[ 1, -2, 0, -1,  3]
[ 0,  0, 1,  2, -2]
[ 0,  0, 0,  0,  0]
```

Vi ser att om vi tar $x_2 = s_1$, $x_4 = s_2$ och $x_5 = s_3$ som fria parametrar får vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s_3 = \mathbf{v}_1 s_1 + \mathbf{v}_2 s_2 + \mathbf{v}_3 s_3$$

som lösningar till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ och $\text{Nul}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
Vidare är kolonn nummer 1 och 3 pivotkolonner så $\text{Col}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ där

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>> R=[A(:,1) A(:,3)]
R =
[ -3, 1]
[  1, 3]
[  2, 8]

>> rref(R')'  % Något att klura på. Så här får vi samma svar som colspace(A)
ans =
[   1,    0]
[   0,    1]
[ 1/5, 13/5]
```