Matematik
Chalmers tekniska högskola 2019-01-17

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097 Plats och tid: M, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1 Låt planet π: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$.

(a) Bestäm normalen till planet. (1p)

(b) Bestäm en punkt på planet och en punkt som inte är i planet. (1p)

(c) Formulera planet på parameterform. (2p)

(d) Bestäm skärningslinjen mellan planet ovan och planet som ges av $-4x_1 + 2x_3 = 3$. (3p)

(a) $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) T.ex. $(1, 1, 1)$ ligger i planet och $(0, 1, 1)$ ligger inte i planet.

(c) Vi har $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$. Låt $x_2 = s, x_3 = t$. Vi får $x_1 = 1/2 + s - t/2$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 + s - t/2 \\ x_2 = 0 + s \\ x_3 = 0 + t \end{cases}$$

(d) Alla punkter (x_1, x_2, x_3) som finns i bägge planen samtidigt. Dvs. lös

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Vi får linjen

$$\begin{cases} x_1 = -3/4 + 1/2t \\ x_2 = -5/4 + t \\ x_3 = 0 + t \end{cases}$$

---

2 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2-a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{bmatrix}$$

(a) Visa att om $a = 3$ så är kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$ linjärt beroende. (4p)

(b) Bestäm determinanten för $\boldsymbol{A}$. För vilka värden på a blir determinanten 0? (4p)

(c) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$ för de värden på a då $\det(\boldsymbol{A}) = 0$? Vilken rang har $\boldsymbol{A}$ för de värden på a då $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$? Motivera dina svar noga. (4p)

(a)

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 fri, så välj $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$. Vi får $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = t$. Välj t.ex. $t = 1$, så blir $x_1 = 1, x_3 = 1$, dvs. nollskilda.

(b)

$$\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (2-a) \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 2-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(2-a)(1-a)(2-a) - (1-a) = (1-a)((2-a)^2 - 1) =$$
$$(1-a)(a^2 - 4a + 3) = 0$$

Vi får $a = 1$, $a = 1$ och $a = 3$.

(c) Om $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ har $\boldsymbol{A}$ tre linjärt oberoende kolumnvektorer och rangen är 3. Om $a = 1$ får vi

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som radreduceras till

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med en pivot kolumn, vilket ger rangen 1. Analogt resonemang med $a = 3$ ger rangen 2.

---

3 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ (2p)

(b) Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. (5p)

(c) Låt $\boldsymbol{B}$ vara en $m \times n$ matris och låt $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ ha n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ av längd 1, med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Visa att (4p)

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i|^2 = \lambda_i$$

(a)

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Egenvärden:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Samma matris som i uppgift 1, så

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

Vi får $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

Egenvektorer:
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \neq 0 \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = 3$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \neq 0 \in \mathbb{R}$$

(c)

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i|^2 = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i)^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^T(\lambda_i\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i$$

---

4 Låt

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vara bas för $\mathbb{R}^3$ (standardbasen) och låt

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vara en annan bas för $\mathbb{R}^3$

(a) Bestäm cosinus för vinkeln mellan $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Är vinkeln spetsig, rät eller trubbig? (2p)

(b) Är $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ en ON-bas? Motivera ditt svar. (2p)

(c) Låt $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i basen $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Bestäm $\boldsymbol{b}$ i standardbasen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. (4p)

(d) Låt $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ vara en ON-bas för $\mathbb{R}^n$. Låt $\boldsymbol{b}$ vara en vektor med längden p i basen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. Vilken längd har $\boldsymbol{b}$ i standardbasen? Motivera ditt svar. (5p)

(a)

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2|} = \frac{-3}{1 \cdot 5} < 0$$

Svar: $\cos(\alpha) = \dfrac{-3}{5}$, vinkeln är trubbig.

(b) Nej $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ är inte en ON-bas. De är inte ortogonala vektorer med längden 1.

(c)

$$-8 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så $x_1 = -8 - 6 + 9 = -5$, $x_2 = 8 - 18 = -10$, $x_3 = 9$. Svar $\begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 9 \end{bmatrix}$

(d) Låt $\boldsymbol{y}$ vara vektorn $\boldsymbol{b}$ i standardbasen och låt

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

Eftersom $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ är en ON-bas har vi att $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^T$ Vi har

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{b}$$

och

$$|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{U}\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{b})} = \sqrt{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}} = p$$

---

5 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en matris $\boldsymbol{B}$ sådan att $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Det ska gälla att $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$. (3p)

(b) Låt H vara ett område i $\mathbb{R}^2$ som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (4p) och låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med $\boldsymbol{A}$ som avbildningsmatris. Bestäm arean av bilden av H.

(a) Låt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

(b)

$$\text{'Area H'} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot 1 = 5$$

$$\text{'Area av bilden av H'} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot 5 = 15$$

Lycka till !