

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: SB Multi, 14:00-18:00

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-
tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

S V A R o c h L Ö S N I N G A R

1 En kvadratisk matris $\mathbf{M}$ sådan att $\mathbf{M}^k = \mathbf{0}$ för något heltal $k > 0$ kallas nilpotent.

(a) Låt

(3p)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Visa att $\mathbf{M}$ är nilpotent.

(b) Bestäm determinanten för $\mathbf{M}$ i (a)-uppgiften.

(2p)

(c) Låt $\mathbf{M}$ vara en $n \times n$ nilpotent matris. Bestäm determinanten för $\mathbf{M}$. Motivera ditt svar. (4p)

(a)

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{M}^3 = \mathbf{M}\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Svar: 0.

(c) Determinanten blir alltid 0 eftersom $0 = \det(\mathbf{0}) = \det(\mathbf{M}^k) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{M}) \dots \det(\mathbf{M})$.

2 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Svara på följande tre frågor. Motivera dina svar noggrant.

- (i) Bestäm en nollskild vektor i nollrummet för $\mathbf{A}$ (3p)
- (ii) Bestäm en vektor i kolumnrummet för $\mathbf{A}$ (3p)
- (iii) Bestäm rangen för $\mathbf{A}$. (2p)
- (b) Låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vara de två första kolumnvektorerna i $\mathbf{A}$ ovan. Bestäm $\mathbf{v}_2$ om (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ och } \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

- (c) Låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vara två godtyckliga kolumnvektorer. Och låt (4p)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ och } \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

Visa att $\mathbf{v}_1$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_2$.

- (a) (i) Lös ekvationen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

dvs. $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -7/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$. Låt tex. $t = 2$, vi får $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ som ligger i nollrummet för $\mathbf{A}$.

- (ii) En vektor som är linjärkombination av vektorerna i $\mathbf{A}$, tex $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix}$ eftersom

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix}$$

- (iii) Rangen = 2

- (b) Vi har $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14$,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14 \text{ och } \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{14}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- (c) $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T (\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1) = \mathbf{a}_1^T (\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1^T (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \frac{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1}) =$
 $\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \frac{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1} = \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 = 0$

3 Låt π vara planet $x - y + 2z = 0$.

(a) Bestäm en normalvektor av längd 1 till planet. (1p)

(b) Låt

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

(3p)

där $\mathbf{I}$ är 3×3 identitetsmatrisen och $\mathbf{n}$ 3×1 är 3×1 normalvektor av längd 1 till planet π ovan. Beräkna $\mathbf{Q}$.

(c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{Q}$.

(5p)

(a) $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Om $\mathbf{u}$ är en vektor i planet π , så är $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, dvs. $\mathbf{u}$ är en egenvektor med egenvärdet 1. Det finns 2 linjärt oberoende vektorer som är ortogonala mot $\mathbf{n}$, så egenvärdet har multiplicitet 2 (dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$).

Det gäller att $\mathbf{Q}\mathbf{n} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{n} = \mathbf{I}\mathbf{n} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n} = \mathbf{n} - 2\mathbf{n} = -\mathbf{n}$. Dvs. $\lambda_3 = -1$ med egenvektorn $\mathbf{n}$.

(Man kan förstås också ställa upp karakteristiska ekvationen och bestämma egenvärden och egenvektorer på vanligt sätt).

4 Låt $l_1 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ och låt π vara planet $x - y + 2z = 1$

(a) Ligger linjen i planet π ? (Motivera ditt svar).

(3p)

(b) Är linjen parallell med planet? (motivera ditt svar).

(3p)

(c) Bestäm kortaste avståndet mellan planet och linjen.

(2p)

(a) Nej linjen ligger inte i planet. Tex. punkten $(0, 1, -1)$ ligger på linjen men inte i planet.

(b) Nej, linjens riktningsvektor är inte ortogonal mot planets normalvektor.

(c) Punkten $(1, 0, 0)$ ligger både på linjen och i planet. Så avståndet är 0.

5 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Är $\mathbf{A}$ ortogonal? (Motivera ditt svar). (2p)
- (b) Visa att om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två ortogonala matriser, så är även $\mathbf{AB}$ en ortogonal matris. (4p)
- (c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en linjär avbildning med $\mathbf{A}$ som avbildningsmatris. Vilken vektor avbildas på $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$? (3p)
-

- (a) Nej, ty $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \neq \mathbf{I}$.
- (b) $(\mathbf{AB})^T (\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}$
- (c) Lös $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right]$$

Svar: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ avbildas på $\mathbf{v}$.
