Matematik
Chalmers tekniska högskola 2017-01-12

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097 Plats och tid: SB, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

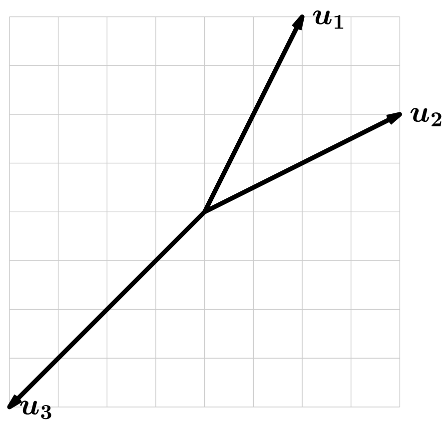
---

*För att vara tydlig har jag använt · för skalärprodukt och * för multiplikation i alla uppgifter nedan.*

---

1 Denna uppgift omfattar 15 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar**.

2 Låt $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vara 3 st vektorer i $\mathbb{R}^2$ enligt figuren nedan.



(a) Låt (3p)

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1$$

Komplettera figuren ovan med $\boldsymbol{w}_1$ och $\boldsymbol{w}_2$. (Det går även bra att rita av figuren om du inte vill lämna in tentatesen). Rita tydligt, och förklara även i ord, så att jag säkert förstår hur du menar.

(b) Låt (4p)

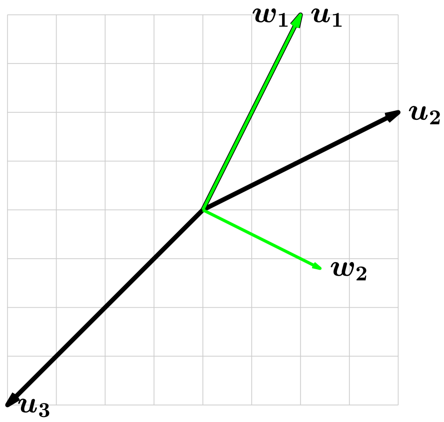
$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1 - \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_2}{\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{w}_2} * \boldsymbol{w}_2$$

där $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ enligt (a) ovan. Bestäm $\boldsymbol{w}_3$.

(c) Låt $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Uttrycket (3p)

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1$$

i (a) uppgiften ovan kan skrivas $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{u}_2$, där $\boldsymbol{P}$ är en 2×2 matris. Bestäm $\boldsymbol{P}$.



(a)

(b) $\boldsymbol{w}_1$ och $\boldsymbol{w}_2$ är ortogonala (se (a) ovan) och

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1 + (\boldsymbol{u}_3 - \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1) = \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1 + \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{w}_2}{\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{w}_2} * \boldsymbol{w}_2.$$

dvs $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$

(c)

$$\boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1} * \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} * \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} * \boldsymbol{u}_1 * \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 =$$

$$\boldsymbol{I} * \boldsymbol{u}_2 - \frac{1}{\boldsymbol{u}_1^T * \boldsymbol{u}_1} * \boldsymbol{u}_1 * \boldsymbol{u}_1^T * \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{\boldsymbol{u}_1^T * \boldsymbol{u}_1} * \boldsymbol{u}_1 * \boldsymbol{u}_1^T) * \boldsymbol{u}_2$$

Med $\boldsymbol{u}_1^T * \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$ och $\boldsymbol{u}_1 * \boldsymbol{u}_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ får vi

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{\boldsymbol{u}_1^T * \boldsymbol{u}_1} * \boldsymbol{u}_1 * \boldsymbol{u}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

---

3 Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ och antag $a_{11} \neq 0$ och låt $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

(a) Låt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U}$ där $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$. Bestäm $\boldsymbol{L}$ och $\boldsymbol{U}$ uttryckt i $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (3p)

(b) Antag att man beräknat en lösning till $\boldsymbol{L} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Formulera ekvationssystemet man behöver lösa om man vill bestämma $\boldsymbol{x}$ i $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med hjälp av $\boldsymbol{y}$. Motivera ditt svar. (3p)

(a)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21} * u_{11} & l_{21} * u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

Vi får direkt $u_{11} = a_{11}, u_{12} = a_{12}$. Vi ser att $l_{21} * u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ och $l_{21} * u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} * a_{12}$. Dvs

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} * a_{12} \end{bmatrix}$$

(b) Vi har

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{L} * (\boldsymbol{U} * \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{L} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \text{ där } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{U} * \boldsymbol{x}$$

Svar: $\boldsymbol{U} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

---

4 Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna determinaten till $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$ där $\boldsymbol{I}$ är 2×2 identitetsmatrisen. (1p)

(b) Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer för $\boldsymbol{A}$ (obs detta är samma matris som i uppgift 1(b)). (3p)

(c) Visa att $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. (3p)

(d) Ge exempel på en 2×2 matris med egenvärden $\lambda_1 = \lambda_2$ som är diagonaliserbar. Motivera ditt svar. (2p)

(a) $\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}) = 4 - 4 = 0$

(b) Karakteristiska ekvationen $\det(\boldsymbol{A} - \lambda * \boldsymbol{I}) = 0$

$$0 = \det(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2*\lambda - 3$$

som har lösning $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. (Alt. Från (a) ovan får vi $\lambda_1 = -1$ och från uppgift 1(b) får vi $\lambda_2 = 3$).

Egenvektorn för λ_1 ges av lösningarna till

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) * \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} * t, t \in \mathbb{R}$. Från 1(b) har vi att egenvektorn som hör till $\lambda_2 = 3$ är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} * t, t \in \mathbb{R}$

(c) Låt $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Med $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ får vi

$$\boldsymbol{X} * \boldsymbol{D} * \boldsymbol{X}^T = (\frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * (\frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) =$$

$$\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

(d) Exempelvis matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärden $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar med $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eftersom $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} * \boldsymbol{D} * \boldsymbol{I}^T$ där $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

---

5 Låt $x + 2 * y - 2 * z = 3$ och $2 * x + 4 * y - 4 * z = 7$ vara två plan och låt $P_0 = (3, 0, 0)$ vara en punkt.

(a) Bestäm avstånden från P_0 till planen. (3p)

(b) Visa att planen är parallella. (3p)

(c) Bestäm avståndet mellan planen. Motivera ditt svar. (1p)

(d) Bestäm, på parameterform, det plan som går genom origo och som innehåller alla linjärkombinationer av vektorer i $\mathbb{R}^3$ ortogonala mot normalvektorerna till planen ovan. (3p)

(a) $P_0 = (3, 0, 0)$ ligger i planet $x + 2 * y - 2 * z = 3$ eftersom $3 + 2 * 0 - 2 * 0 = 3$, så avståndet är 0. Avståndet från P_0 till planet $2 * x + 4 * y - 4 * z - 7 = 0$ ges av

$$D = \frac{|2 * 3 + 4 * 0 + (-4) * 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

(b) Normalerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ till planen är parallella ty $2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(c) Eftersom planen är parallella och avståndet från P_0 i det ena planet till det andra planet är $\frac{1}{6}$ blir avståndet mellan planen $\frac{1}{6}$

(d) Bestäm alla lösningar till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med lösning $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * s + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * t,\ s, t \in \mathbb{R}$

---

1 (a) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna determinanten till $\boldsymbol{A}$ (3p)

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -(2-0) + 2*(0-(-4)*7) = 54$$

(b) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$(\boldsymbol{A} - 3 * \boldsymbol{I}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Lösning:

$$(\boldsymbol{A} - 3 * \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Gausseliminera totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 fri, låt $x_2 = t \in \mathbb{R}$, vi får $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Betrakta följande matlabsekvens: (3p)

```
>> A = [1 2 1;2 -2 -1;3 4 2];
>> I = eye(3);
>> rref([A I])
ans =
       1    0    0     0     2/7    1/7
       0    1    1/2   0   -3/14    1/7
       0    0    0     1     1/7   -3/7
```

(Anropet `eye(3)` ger $3?times3$ identitetsmatrisen). Vad kan man säga om inversen till matrisen `A`?

Lösning: Kolumnerna i `A` är linjärt beroende, så invers saknas.

(d) Låt $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? (3p)

(i) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}\}$ är linjärt beroende

(ii) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$ är linjärt beroende

Motivera dina svar

Lösning:

(i) Falskt, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{z}$ är ortogonala så de är linjärt oberoende.

(ii) Sant, ty 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende. Gausselimnering av matrisen $\left[\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$ ger minst en fri kolumn.

(e) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ och låt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{U}$ där $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$. (3p)
Bestäm $\boldsymbol{U}$

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 3 * u_{11} & 3 * u_{12} + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi får $u_{11} = 1$, $u_{12} = 2$ och $3 * u_{12} + u_{22} = 4 \Rightarrow u_{22} = -2$. Dvs

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$