

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: SB, 14:00-18:00

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

Ifall någon undrar, så var det uppgift 1(a) och 4(a) som jag plockat från bokens övningar.

1 (a) Beräkna determinanten

(3p)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) En skevsymmetrisk matris är en kvadratisk matris $\mathbf{A}$ där $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

(i) Ge exempel på en 3×3 skevsymmetrisk matris som inte är nollmatrisen. (3p)

(ii) Visa att om $\mathbf{A}$ är en 5×5 skevsymmetrisk matris så är $\det(\mathbf{A}) = 0$. (4p)

(a) Svar: 1

(i) (i) Svar: tex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) (ii) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^5 \det(\mathbf{A})$, dvs. $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$, dvs. determinanten är 0.

2 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Svara på följande tre frågor. Motivera dina svar noggrant.

- (i) Tillhör $\mathbf{u}$ nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$? (3p)
- (ii) Tillhör $\mathbf{u}$ kolumnrummet till $\mathbf{A}$? (4p)
- (iii) Vilken rang har $\mathbf{A}$? (1p)
- (b) Låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vara de två första kolumnvektorererna i $\mathbf{A}$ ovan och låt (3p)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T) \mathbf{a}_1$$

- (i) Är de två vektorerna $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{v}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar.
- (ii) Är de tre vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{v}$ linjärt beroende? Motivera ditt svar.

- (a) (i) $\mathbf{u}$ tillhör nollrummet till $\mathbf{A}$ eftersom

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (ii) Nej, $\mathbf{u}$ ligger inte i kolumnrummet till $\mathbf{A}$ eftersom $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ saknar lösning.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ -3 & -5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (iii) Rang 2 ($\mathbf{A}$ har två pivotkolumner, se (ii))
- (b) (i) Ja, de är ortogonala:

$$\mathbf{a}_2^T (\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T) \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 = 0$$

- (ii) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{v}$ är linjärt beroende eftersom $\mathbf{v}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T) \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 - \frac{1}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2$$

- 3 (a) Låt $\mathbf{T} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning. Hur många rader och kolumner har avbildningsmatrisen. Är avbildningen bijektiv? (2p)

- (b) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vara en avbildningsmatris till en linjär avbildning. (3p)

Beskriv avbildningen geometriskt (rita tex. en figur och förklara).

- (c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ ovan. (4p)

- (a) 2 rader och 5 kolumner. Nej avbildningen är inte bijektiv, avbildningsmatrisen går inte att invertera.

(b) Avbildningen speglar punkter i $\mathbb{R}^3$ genom planet $x_2 = 0$

(c) Egenvärden:

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(1 - \lambda)$$

dvs. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$

Egenvektorer:

$\lambda = -1$

$$(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = t \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{där } t \neq 0 \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = s \\ v_2 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \quad \text{där } s \neq 0, t \neq 0 \in \mathbb{R}$$

4 Låt $l_1 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ och $l_2 = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$ vara två linjer.

(a) Skär linjerna varandra? Är de parallella? (Motivera ditt svar). (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som går genom linjen l_1 och är parallell med linjen l_2 . (5p)

(c) Beräkna ortogonala projektioner av $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ på planet du bestämt i (b)-uppgiften. (3p)

(a) De skär inte varandra, de är inte parallella

(b) Normalvektor $\mathbf{n}$ till planet ska vara ortogonal mot både l_1 och l_2 ,

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi får planet $\pi : 2x - 2z = d$. Punkt $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på planet ger $d = 2$. Planets ekvation blir $2x - 2z = 2$

(c) $\mathbf{P}_{1_{proj}} = \mathbf{P}_1 + \alpha \mathbf{n}$, där $\alpha = \frac{d - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 8 \text{ och } \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

dvs

$$\mathbf{P}_{1_{proj}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_2$ ligger redan på planet, så projektionen blir $\mathbf{P}_2$.

5 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Avgör om någon av $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ respektive $\mathbf{AB}$ är inverterbara. Om så bestäm inversen. (5p)
- (b) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två $n \times n$ matriser. Och antag att $\mathbf{AB}$ är inverterbar. Visa att i så fall är $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ inverterbara. (4p)

- (a) $\mathbf{A}$ är inte inverterbar, kolumnerna är linjärt beroende. $\mathbf{B}$ är inverterbar med inversen $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, produkten $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 13 \\ -1 & 4 & 13 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ är inte inverterbar.
- (b) Om $\mathbf{AB}$ inverterbar är $0 \neq \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, dvs. $\det(\mathbf{A}) \neq 0, \det(\mathbf{B}) \neq 0$, dvs. $\mathbf{B}$ inverterbar.

Lycka till !