TMV225+TMV176 Inledande matematik M, TD
Sammanfattning. Läsanvisningar inför tentamen.
2008–10–14

A. Talsystemen. (Adams P.1. Anteckningar från introkursen.)

$\mathbf{N}$ de naturliga talen

$\mathbf{Z}$ de hela talen

$\mathbf{Q}$ de rationella talen

räkneoperationer: addition $+$, multiplikation $\cdot$
(subtraktion $a - b = a + (-b)$, division $a/b = a \cdot (b^{-1})$)

kunna räknereglerna

kunna räkna med absolutbelopp, olikhet, intervall

rationellt tal = periodisk decimalutveckling

$\mathbf{R}$ de reella talen = alla decimalutvecklingar, periodiska och ickeperiodiska

$\mathbf{C}$ de komplexa talen (Adams Appendix II)

B. Geometri i rummet. (Adams kap 10.1-10.4)

vektor, norm, skalärprodukt, ortogonalitet om och endast om $a \cdot b = 0$, projektion, ortogonal uppdelning, kryssprodukt, volym av parallellepiped, trippelprodukt, ekvationer för linjen och planet, beräkna avstånd med hjälp av projektion

C. Linjära ekvationssystem (Lay 1.1)

Skriva linjära ekvationssystem på matrisform.

Kunna Gauss eliminationsmetod.

Elementära radoperationer:

(1) multiplicera rad med skalär,
(2) addera en multipel av en rad till en annan rad,
(3) två rader byter plats.

Pivot-element, fria och bundna variabler.

Kunna avgöra från trappstegsmatrisen om systemet är konsistent, och hur många lösningar det har.

D. Funktioner (Adams P.4)

$f : D(f) \to S$, MATLAB: `function y=f(x)`

namn: f, MATLAB: funktionshandtag, `@f`

definitionsmängd: $D(f)$, MATLAB: typ av input-variabler

målmängd: S, MATLAB: typ av output-variabler

tilldelningsregel: $y = f(x)$ (ibland en formel, normalt ingen formel utan någon mer komplicerad algoritm), MATLAB:

```
function y=f(x)
...
y=...     % algoritm, ibland en formel
```

värdemängd: $R(f)$, $R(f) \subset S$, MATLAB: ingen motsvarighet

Ofta talmängder: $S = \mathbf{R}$, $D(f) \subset \mathbf{R}$.

graf: punktmängden (x, y) med $y = f(x)$, MATLAB: `x=linspace(a,b), y=f(x), plot(x,y)`

D.1 Kombinera funktioner. (Adams P.5)

Olika sätt att kombinera gamla funktioner och på så vis bilda nya funktioner

linjär kombination: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$
produkt och kvot av funktioner: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
sammansättning av funktioner $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

D.2 Polynomfunktioner. (Adams P.6)
kunna rita linjära funktioner $y = mx + b$, känna betydelsen av m och b
kunna rita kvadratiska funktioner $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = ax^2 + c$, $y = (x - d)^2$, och slutligen $y = ax^2 + bx + c$ genom komplettering av kvadraten $y = a(x - d)^2 - d^2 + c$, $d = b/(2a)$.
att kunna räkna med polynom: bilda linjär kombination, multiplicera, likhet mellan polynom, summabeteckning $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
styckvisa polynom
rationella funktioner: "polynom genom polynom"
polynomdivision

E. Gränsvärde och kontinuitet. (Adams kap 1, 9.1. BM kap 3.)

E.1 Formell definition av gränsvärden.
$\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
Kunna använda definitionen på enkla exempel.

E.2 Räkneregler.
Kombination av gränsvärden. Utan bevis.

E.3 Definition av kontinuitet. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

E.4 Räkneregler.
Kombination av kontinuerliga funktioner. Utan bevis.

E.5 Lipschitz-kontinuitet. (BM kap 2)
kunna definition av Lipschitz-kontinuitet
kunna räkna ut Lipschitz-konstant för de enklaste fallen med hjälp av definitionen: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = \sqrt{x}$
kunna räkna ut Lipschitz-konstant för mer komplicerade funktioner med hjälp av räkneregler eller derivata, se punkt F.2 nedan.
Kombination av Lipschitz-funktioner: veta att linjär kombination, produkt, kvot och sammansättning av Lipschitz-funktioner ger Lipschitz-funktioner
veta att Lipschitz-funktion är begränsad funktion

E.6 Cauchy-följd. (BM kap 4.2)
kunna definition av Cauchy-följd
kunna visa att de enkla fallen är Cauchy: $a_n = 1/n$, $a_n = 1/n^2$, $1/\sqrt{n}$
kunna sambandet Cauchy-följd = decimalutveckling = reellt tal

E.7 Kvadratroten ur 2. (BM kap 4)
kunna visa att kvadratroten ur 2 inte är rationellt tal
kunna skriva ned bisektionsalgoritmen

E.8 Satser om kontinuerliga funktioner (Adams 1.4. BM kap 4)
kunna formulera **Bolzanos sats** och dess **bevis** (BM kap 4)

Sats (Bolzano)**.** *Antaganden:*

- *f är kontinuerlig på $[a,b]$,*
- *$f(a)f(b) < 0$.*

Slutsats: Då finns $x \in [a,b]$ sådan att $f(x) = 0$. Om f är strängt monoton så är x den enda roten.

obs bevisets fyra steg:

1. algoritm (som ger en följd x_i) (bisektionsalgoritmen)

2. x_i är Cauchy-följd: $x_i - x_j \to 0$, $\bar{x} = \lim x_i$

3. $\bar{x}$ löser ekvationen: $f(\bar{x}) = \lim f(x_i) = 0$

4. unik lösning om f är strängt monoton

kunna satsen om mellanliggande värden (BM kap 4, Adams 1.4, Theorem 9) (**med bevis enligt BM**)

kunna satsen om max-min (Adams 1.4 Theorem 8) (utan bevis)

kunna satsen om invers funktion (Adams 3.1. BM kap 4.5)

D.9 Fixpunkter och kontraktionsavbildning. (BM kap 5)

omskrivning av ekvation mellan "rotform" $f(x) = 0$ och "fixpunktsform" $x = g(x)$

kunna **fixpunktssatsen för kontraktioner** ("contraction mapping theorem" BM 5.2, Adams 4.6 Theorem 8) **med bevis**

obs bevisets fyra steg:

1. algoritm (som ger en följd x_i) (fixpunktsiteration)

2. x_i är Cauchy-följd: $x_i - x_j \to 0$, $\bar{x} = \lim x_i$ (räcker att kunna visa $|x_{k+1} - x_k| \le L^k|x_1 - x_0|$)

3. $\bar{x}$ löser ekvationen: $\bar{x} = \lim x_{i+1} = \lim g(x_i) = g(\bar{x})$

4. unik lösning

F. Derivatan. (Adams kap 2.1-2.8)

F.1 Definition, räkneregler och enkla fall.

kunna derivatans definition

kunna beräkna derivatan utgående från definitionen för de enklaste fallen: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = \sqrt{x}$

kunna satsen om att deriverbarhet medför kontinuitet (Adams 2.3 Theorem 1) (utan bevis)

numerisk beräkning av derivata (BM kap 6)

räkneregler för kombinationer av derivator (utan bevis)

derivata av sin, cos, tan, cot (utan bevis)

(använd inte csc, sec, dvs $D\tan x = \frac{1}{\cos^2(x)}$ i stället för $\sec^2(x)$)

F.2 Medelvärdessatsen MVS.

kunna **medelvärdessatsen** MVS (Adams 2.6 Theorem 11) och **generaliserade** MVS (Adams 2.6 Theorem 16) (utan bevis, skippa även Theorem 15)

kunna konsekvenser av MVS:

satsen om monoton funktion (Adams 2.6 Theorem 12) **med bevis**

satsen om konstant funktion (Adams 2.6 Theorem 13) **med bevis**

satsen om beräkning av Lipschitzkonstant, med **bevis**, dvs följande:

Sats (Sats 4 i BM 2.2)**.** *(Beräkning av Lipschitzkonstant) Antag att* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *är kontinuerlig på* $[a, b]$ *och deriverbar på* (a, b) *med begränsad derivata,*

$$|f'(x)| \le M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Då gäller

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b],$$

dvs f *är Lipschitz med konstanten* $L_f \le M$*.*

Bevis. MVS på intervallet $[x, y]$ om $x < y$ (eller $[y, x]$ om $y < x$) ger en (okänd) punkt c mellan x och y sådan att

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| = |f'(c)|\,|x - y| \le M|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

□

G. Transcendentala funktioner. (Adams 3.1–3.6)

G.1 Invers funktion
1-1, hur man definierar invers funktion
derivatan av invers funktion

G.2 Logaritm och exponentialfunktion
kunna alla logaritm- och exponentialregler (Adams 3.2)
kunna definition av naturliga logaritmen ln (Adams 3.3)
naturliga logaritmens egenskaper **med bevis** (Adams 3.3 Theorem 1, Theorem 2)

$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ D\ln(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

kunna definitionen av exponentialfunktionen exp och dess egenskaper

$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ D\exp(x) = \exp(x) \end{cases}$$

känna till definitionen $e^x = \exp(x)$ med $e = \exp(1)$
känna till tillväxt och avtagande av exp och ln (Adams 3.4 Theorem 1, Theorem 2) (utan bevis)
kunna definition av arcsin, arccos, arctan, arccot
kunna definition av cosh och sinh (Adams 3.6)

H. Användning av derivatan. (Adams 4.1-4.9)

H.1 Kritisk punkt, max/min, kurvritning (Adams 4.1-4.5)
relaterade hastigheter: läs något av exemplen (Adams 4.1)
kunna definition av absoluta och lokala extremvärden
hur man lokaliserar extremvärden (Adams 4.2 Theorem 2)
kunna definition av konkav upp (=konvex) och konkav ned (=konkav)
känna betydelsen av andra derivatan f'' (Adams 4.3 Theorem 5, Theorem 6)
kunna rita enkla funktioner med hjälp teckenstudium av derivata (sned asymptot inte viktigt) (Adams 4.4)
läs några exempel på extremvärdesproblem (Adams 4.5)

H.2 Linjärisering. (Adams 4.7)

kunna skriva ned linjäriseringen av f i punkten a

kunna felformeln (Adams 4.7 Theorem 9) med **bevis**

kunna uppskatta linjäriseringsfelet med hjälp av felformeln och en begränsning $|f''(t)| \leq K$ för alla t i något intervall som innehåller x och a

H.3 Newtons metod. (Adams 4.6. BM kap 6.)

kunna motivera Newtons metod med hjälp av linjärisering

geometrisk tolkning med hjälp av tangent

känna till feluppskattning (Adams 4.6 Theorem 7 och BM kap 6)

känna till stoppvillkoret

kunna skriva ned algoritmen

H.4 Taylors formel. (Adams 4.8–4.9)

kunna skriva ned Taylors formel med restterm för en allmän funktion

kunna uppskatta felet med hjälp av resttermen och en begränsning $|f^{(n=1)}(t)| \leq K$ för alla t i något intervall som innehåller x och a

kunna beräkna Taylorpolynom för enkla funktioner (Tabell 4)

kunna använda “stora O” beteckningen (även kallad “stora ordo”)

kunna beräkna gränsvärden av obestämd form med Taylors formel (Adams 4.9, Example 1) (ej L'Hôpitals regler)

I. Datorövningar.

kunna alla datorövningar som vi gjort

J. Litteratur.

Adams kapitel: P, Appendix II, 1, 2.1–2.8, 3.1–3.6 4.1–4.8, 10.1-10.5

Beräkningsmatematik (kompendium) BM kap 2–6.

`/stig`