

Inledande matematik M/TD, Dugga 3

NAMN:

Personnummer:

Program: (ringa in)

M

TD

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
SUMMA:	

1. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $f(x) = x^3 - 2x$ på intervallet $[0, 1]$.
(2 p)

2. Beräkna två steg av bisektionsalgoritmen med följande data: $f(x) = x^2 - 3$, $[0, 4]$.
(2 p)

3. Formulera Bolzanos sats.
(2 p)

En extra övningsfråga. En kub med volymen 1000 cm^3 ska tillverkas med toleransen $\pm 5 \text{ cm}^3$. Hur noggrannt måste kubens sida göras? Använd Lipschitz-villkor för att lösa uppgiften, annars ingen poäng.

Lösningar på nästa sida.

1. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $f(x) = x^3 - 2x$ på intervallet $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^3 - y^3 - 2(x - y)| = |(x^2 + xy + y^2)(x - y) - 2(x - y)| \\ &\leq (x^2 + |x||y| + y^2)|x - y| + 2|x - y| \\ &\leq ((1 + 1 + 1) + 2)|x - y| = 5|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1]\end{aligned}$$

Alltså: $L = 5$.

Eller med hjälp av derivata:

$$|f'(x)| = |3x^2 - 2| \leq 3x^2 + 2 \leq 3 \cdot 1 + 2 = 5 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Alltså: $L = 5$.

En extra övningsfråga. En kub med volymen 1000 cm^3 ska tillverkas med toleransen $\pm 5 \text{ cm}^3$. Hur noggrant måste kubens sida göras? Använd Lipschitz-villkor för att lösa uppgiften, annars ingen poäng.

Volym: $V(x) = x^3$.

Nominella värden: $a = 10$, $V(a) = 1000$. Tolerans för V är $\epsilon = 5$. Bestäm toleransen δ för sidan x .

Vi bestämmer först en lipschitzkonstant för V på intervallet $[0, 11]$ som innehåller $a = 10$. Med derivata: $|V'(x)| = |3x^2| = 3x^2 \leq 3 \cdot 121 = 363$. Vi tar $L = 363$ eller $L = 400$ för enkelhets skull.

Antag $|x - a| < \delta$. Lipschitzvillkoret ger nu:

$$|V(x) - V(a)| \leq L|x - a| < L\delta$$

Detta blir $\leq \epsilon$ om $L\delta \leq \epsilon$, det vill säga

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{L} = \frac{5}{400} = \frac{25 \cdot 5}{10000} = 0.0625$$