Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2008–10–25, f V

Telefon: Adam Wojciechowski, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Obs: teknologer inskrivna H06 eller tidigare gör uppgifterna på baksidan!

---

1. (a) Låt $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Dela upp vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ i två komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ så att $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$.

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$. Skriv ned hur man använder denna för att lösa Uppgift 1(a).

(c) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjerna $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(6, 3, 2)$ och $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 6, 2)$.

2. (a) Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$. Ange eventuella extremvärden, inflektionspunkter och konkavitet.

(b) Visa att f har exakt en rot med hjälp av Bolzanos sats. Välj ett lämpligt startintervall och genomför två steg av bisektionsalgoritmen för att beräkna roten.

(c) Hur många steg behövs för att felet ska bli högst 10^{-6}?

3. (a) Beräkna en approximation av $1.1^{1/3}$ med hjälp av linjärisering av $g(x) = x^{1/3}$ kring $a = 1$. Beräkna även en uppskattning av linjäriseringsfelet.

(b) Välj en lämplig startpunkt och genomför ett steg av Newtons metod för beräkning av roten till funktionen $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ från Uppgift 2.

(c) Beskriv hur man beräknar roten med det program `newton.m` som du har skrivit. Du behöver inte skriva ned själva programmet `newton.m` utan bara kommandoraden samt den funktionsfil som behövs.

4. (a) Skriv ned den formella definitionen av gränsvärde $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

(b) Skriv ned definitionen av att f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I.

(c) Vi ska bygga ett kubiskt rum med sidan 10 m. Mitt i rummet står en lodrät pelare från golv till tak med tvärsnittsarean 1 m^2. Bestäm en tolerans för felet i sidan om feltoleransen i volymen (av kuben minus pelaren) är $\pm 1\%$. Tips: Använd Lipschitz-villkoret.

5. (a) Bevisa att om f är kontinuerlig i $[a, b]$ och deriverbar i (a, b) med $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f strängt växande i $[a, b]$.

(b) Skriv ned Bolzanos sats (ej beviset).

(c) Räkna upp de fyra stegen i beviset av Bolzanos sats.

`/stig`

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare. Skriv "GAMMAL" på omslaget till din anomyna tentamen så att jag kan sortera ut de gamla teknologerna.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar, alltså utan motiveringar. (14p)

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

(c) Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x}$$

(d) Låt $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Dela upp vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ i två komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ så att $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$.

(e) För vilka komplexa tal gäller $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och $|z| = 9$.

På uppgift 2–5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 6, 3)$ och $C = (1, 1, 4)$. (6p)

3. Beräkna avståndet från punkten (1,2,3) till planet $3x + y + z = 5$. (6p)

4. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. (6p)

5. En triangel har ett hörn i punkten $(0, \frac{1}{2})$. Motstående sida är parallell med y-axeln. Hur stor kan triangelns area vara om hela triangeln ryms inom enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(a) Varje rationell funktion, som inte är ett polynom, har minst en lodrät asymptot.

(b) Om en funktion inte är kontinuerlig så är den inte deriverbar.

(c) Om derivatan av $f(g(x))$ och derivatan av $f(x)$ är lika för alla x så är $g(x) = x$ för alla x.

(d) Om funktionen $f''(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och har ett enda nollställe $x = a$ så är f konvex på ett av intervallen $(-\infty, a)$ eller (a, ∞) och konkav på det andra.

(e) Ett homogent ekvationssystem har endast den triviala lösningen om systemet har minst en fri variabel.

(f) Negationen till den öppna utsagan $|x^2 - 2| \leq 1$ är den öppna utsagan $x^2 < 1$ eller $x^2 > 3$.

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I.

(b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

(c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (6p)

`/stig`

TMV225 Inledande matematik M, 2008–10–25, f V. Lösningar.

---

1. (a) $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u} = (4, 5, 6)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{3}(1, 1, 1) = (5, 5, 5)$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{a} = (4, 5, 6) - (5, 5, 5) = (-1, 0, 1)$$

(b) Vi skriver filen `vprojection.m`:

```
function w=vprojection(u,v)
% Vector projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: w=vprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  w   - a 1x3 vector

vhat=v/norm(v);
w=dot(u,vhat)*vhat;
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  v=[1,1,1]
>>  u=[4,5,6]-[2,10,1]
>>  a=vprojection(u,v)
>>  b=u-a
```

(c) Linjernas riktningsvektorer är $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ och $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. En normalvektor ges av

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 27\mathbf{k} = -3(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k})$$

Vi väljer $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$. En punkt i planet: $P_0 = (1, 2, 3)$. Planets ekvation:

$$\mathbf{n} \cdot \overline{PP_0} = 0$$
$$2(x - 1) + 2(y - 2) - 9(z - 3) = 0$$
$$2x + 2y - 9z = -21$$

2.

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}, \quad f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}, \quad f''(x) = 2 + \frac{32}{x^3}$$

Funktionen är odefinierad i $x = 0$. Kritiska punkter ges av

$$f'(x) = 2\frac{x^3 - 8}{x^2} = 0, \quad x = 2.$$

Inflektionspunkter ges av

$$f''(x) = 2\frac{x^3 + 16}{x^3} = 0, \quad x = -16^{1/3} = -2 \cdot 2^{1/3}.$$

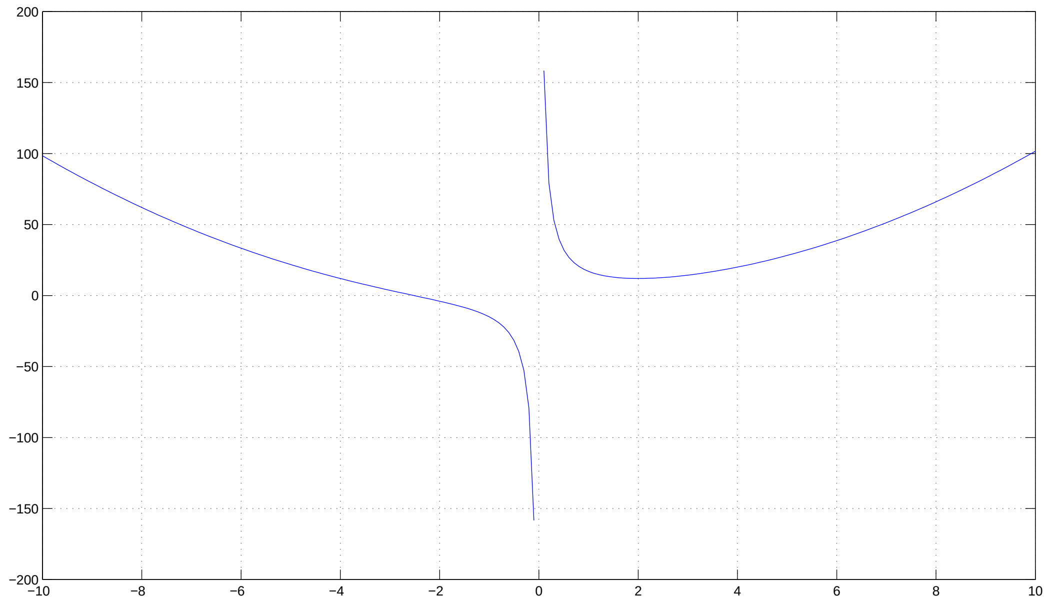
Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Teckentabell: Alltså: ett lokalt minimum = 12 i $x = 2$, en inflektionspunkt $-16^{1/3}$. Funktionen

x		$-16^{1/3}$		0		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	odef	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	odef	$-$	0	$+$
$f(x)$	avtagande	0	avtagande	odef	avtagande	12	växande
$f(x)$	konkav		konvex	odef	konvex		konvex

är konvex (=konkav upp) i $(-16^{1/3}, 0) \cup (0, \infty)$ och konkav (=konkav ned) i $(-\infty, -16^{1/3})$.



(b) Del (a) visar att $f(x) \geq 12$ för $x > 0$, alltså ingen rot där. Dessutom har vi $f(-3) = 11/3 > 0$, $f(-2) = -4 < 0$. Enligt Bolzanos sats finns det en rot i $[-3, -2]$. Eftersom f är strängt avtagande i $(-\infty, 0)$ så finns det ingen annan rot där. Bisektion, ett steg:

$$f(-3) = 11/3 > 0, \;\; f(-2) = -4 < 0$$

$$x_0 = -3, \;\; X_0 = -2, \;\; \hat{x}_0 = -2.5, \;\; f(-2.5) = 6.25 - \frac{16}{2.5} = -0.15 < 0$$

$$x_1 = -3, \;\; X_1 = -2.5, \;\; \hat{x}_0 = -2.75$$

(c) Vi har $|x_i - \bar{x}| \leq (b-a)2^{-i} = ((-2) - (-3))2^{-i} = 2^{-i}$. Vi bestämmer i så att $2^{-i} \leq 10^{-6}$. Vi får

$$e^{-i\ln(2)} \leq e^{-6\ln(10)}$$

$$-i\ln(2) \leq -6\ln(10)$$

$$i \geq 6\ln(10)/\ln(2)$$

Vi tar i lika med heltalstaket av $6\ln(10)/\ln(2)$. (Det blir 20.)

Man kan även resonera så här: $2^{10} = 1024 > 10^3$ så att $2^{-10} < 10^{-3}$ och $2^{-20} < 10^{-6}$. Alltså: $i \geq 20$.

3. (a) Vi har

$$g(x) = x^{1/3},\ g(1) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3},\ g'(1) = 1/3$$
$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Linjäriseringen är, med $a = 1$,

$$L(x) = g(a) + g'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$$

Den linjära approximationen är:

$$1.1^{1/3} \approx L(1.1) = 1 + \frac{1}{3}0.1 = 1.03333...$$

Linjäriseringsfelet är

$$E(x) = \frac{1}{2}g''(s)(x-a)^2 = -\frac{1}{2}\frac{2}{9}s^{-5/3}(x-1)^2, \quad s \text{ mellan } x \text{ och } 1$$

Felet blir då

$$|E(1.1)| = \frac{1}{9}s^{-5/3}0.1^2 \le \frac{1}{9}0.01 = 0.0011111... \le 0.002$$

därför att $s^{-5/3} \le 1$ för $s \in [1, 1.1]$. Vi ser också att felet är negativt. Alltså:

$$1.031 \le 1.1^{1/3} \le 1.033$$

eller $1.1^{1/3} \approx 1.03$ med två korrekta decimaler.

(b) Från Uppgift 2 ser vi att

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}, \quad f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$$

och att vi kan ta startpunkten $x_0 = -2$. Newtons metod:

beräkna residualen: $b = -f(-2) = 4$

beräkna derivatan: $a = f'(-2) = -8$

beräkna ändringen: $h = b/a = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

uppdatera: $x = x + h = -2 - \frac{1}{2} = -2.5$

(Roten är det irrationella talet $-16^{1/3} = -2.5198...$)

(c) Man skriver en funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=x^2+16/x;
```

Sedan skriver man kommandraden:

```
>> x=newton(@funk,-2,1e-6)
```

4. (a) För varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

(b) Det finns en konstant L sådan att

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in I.$$

(c) Låt x vara sidan så att volymen blir $V(x) = x^3 - Ax = x^3 - x$ där $A = 1$ m^2 är pelarens tvärsnittsarea. V är kontinuerlig: För varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Här är $a = 10$ m och $V(a) = 1000 - 10 = 990$ m^3 de nominella värdena och $\epsilon = \frac{1}{100}990 = 9.90$ m^3. Vi antar att $|x - a| < \delta$. Vi ska bestämma δ. Lipschitz-villkoret ger

$$|V(x) - V(a)| \leq L|x - a| < L\delta \leq \epsilon \quad \forall x \in I.$$

om $\delta \leq \epsilon/L$. Vi beräknar en Lipschitz-konstant på ett lämpligt intervall I som innehåller x och a, till exempel, $I = [9, 11]$. Vi har

$$|V'(x)| = |3x^2 - 1| = 3x^2 - 1 \leq 3 \cdot 11^2 - 1 = 362 \quad \forall x \in [9, 11]$$

eftersom maximum inträffar i högra ändpunkten. Vi tar $L = 362$. Alltså:

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{L} = \frac{9.90}{362} \qquad (\approx 0.0273)$$

Vi tar δ lite mindre för enkelhets skull:

$$\delta = \frac{8}{400} = 0.02 \text{ m.}$$

5. Antag $a \leq x < y \leq b$. Medelvärdessatsen på $[x, y]$ ger oss $s \in (x, y)$ så att

$$f(y) - f(y) = f'(s)(y - x) > 0$$

eftersom $f'(s) >$ för alla $s \in (a, b)$ och $y - x > 0$. Alltså: $f(x) < f(y)$ och vi drar slutsatsen att f är strängt växande.

(b) Bolzanos sats. Antaganden:

- f är kontinuerlig på $[a, b]$,
- $f(a)f(b) < 0$.

Slutsats: Då finns $x \in (a, b)$ sådan att $f(x) = 0$. Om f är strängt monoton så är x den enda roten.

(c) Bevisets fyra steg:

1. Bisektionsalgoritmen ger en följd x_i.
2. Visa att x_i är en Cauchy-följd: $x_i - x_j \to 0$, $\bar{x} = \lim x_i$.
3. Visa att $\bar{x}$ löser ekvationen: $f(\bar{x}) = \lim f(x_i) = 0$.
4. Visa att lösningen är unik om f är strängt monoton.

/stig

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare

1. (a) Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{cc} -1 & -3 \\ 2 & \\ & 2 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{cc} & 1 \\ -5 & -1 \\ 1 & \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fri variabel: $x_3 = t$. Sedan fås

$$x_2 = 3 - t, \quad x_1 = 7 - 2t$$

Vi får oändligt många lösningar:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2t \\ 3-t \\ t \end{bmatrix}$$

(b) $g'(x) = -xe^{-x}$

(c) 0

(d) $\mathbf{v} = (1,1,1)$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u} = (4,5,6)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{3}(1,1,1) = (5,5,5) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{u} - \mathbf{a} = (4,5,6) - (5,5,5) = (-1,0,1) \end{aligned}$$

(e) $z = \pm\frac{9}{\sqrt{2}}(1+i)$

2. En normalvektor: $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (1,4,2) \times (2,-1,3) = (14,1,-9)$. Planets ekvation blir:

$$\begin{aligned} &\overline{PA}\cdot\mathbf{n} = 0 \\ &14(x-(-1)) + (y-2) - 9(z-1) = 0 \\ &14x + y - 9z + 21 = 0 \\ &14x + y - 9z = -21 \end{aligned}$$

3. $P_1 = (1,2,3)$ är den givna punkten, $P_0 = (1,1,1)$ är en punkt i planet, $\mathbf{n} = (3,1,1)$ en normalvektor till planet. Avståndet är absolutbeloppet av skalära projektionen av $\overline{P_0P_1}$ på $\mathbf{n}$:

$$d = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot\overline{P_0P_1}}{|\mathbf{n}|}\right| = \frac{|(3,1,1)\cdot(0,1,2)|}{|(3,1,1)|} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$,

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0, \quad -\infty < x < -1 \\ &f'(x) < 0, \quad -1 < x < 0 \\ &f'(0) = 0, \\ &f(0) = 1, \\ &f'(x) > 0, \quad 0 < x < \infty \end{aligned}$$

$$f(x) \to \begin{cases} 0, & x \to -\infty \\ -\infty, & x \to -1^- \\ \infty, & x \to -1^+ \\ \infty, & x \to \infty \end{cases}$$

$R(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

5. Låt hörnen vara $(0, \frac{1}{2})$, (a, b), $(a, -c)$ med $a, b, c > 0$. Arean blir

$$A = \frac{1}{2}a(b+c) = \frac{1}{2}a(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-a^2}) = a\sqrt{1-a^2}$$

Derivatan

$$\frac{dA}{da} = \frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}} = 0$$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A = \frac{1}{2}$.

6. sanna: b, f

7. Se Adams.