MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2012-08-29 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Magnus Önnheim
Telefon: 0703 088 304

TMV225/176 Inledande Matematik M/TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den räta linjen (4 p)

$$l_1 : \quad \frac{x+3}{2} = y - 5 = \frac{z-1}{3}$$

och är parallellt med skärningslinjen mellan de två planen $x+y+2z = 5$ och $x + y = 3$.

(b) Bestäm minsta avståndet från sfären $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{101}$ till planet i uppgift (a). (2 p)

3. Rita grafen till (6 p)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

4. Beräkna följande gränsvärden (utan att använda l'Hospitals regel) (3+3 p)

(a) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2 x}$

5. (a) Skriv en funktionsfil `SecondDerivative.m` som givet en funktion `f` och en punkt `x` använder differenskvoten

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

till att beräkna ett approximativt värde på andraderivatan till `f` i `x`. Du kan sätta $h = 10^{-5}$. (2 p)

(b) Skriv en funktionsfil `KritiskNewton.m` som givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` använder Newtons metod till att beräkna en kritisk punkt till `f` (dvs löser ekvationen $f'(x) = 0$). Du kan anta att programmet `Derivative.m` från datorövning 6 är given. Ledning: Använd även `SecondDerivative.m` från uppgift (a) ovan. (4 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$.

(b) För alla komplexa tal z gäller att $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

(c) För alla reella tal x gäller att $\cos(2x) \leq \cos^2 x$.

(d) Antag att f är en deriverbar funktion. Om f' är begränsad så är även f begränsad.

(e) Om $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existerar, måste även $\lim_{x\to a} f(x)$ existera.

(f) Om en funktion inte är kontinuerlig, så är den inte deriverbar.

7. (a) Formulera Bolzanos sats och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Visa att om en funktion f är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall så är den även kontinuerlig på intervallet, samt ge ett motexempel som visar att det omvända ej gäller. (4 p)

8. (a) Skriv ned definitionen av att f är kontinuerlig i en punkt a. (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att f är deriverbar i en punkt a. (1 p)

(c) Använd en känd sats till att bevisa att om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f konstant i (a, b). (4 p)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	**TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2012-08-29**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten (svara med intervall) (2 p)

$$|3x - 1| > 2.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) För vilka komplexa tal z gäller att $\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Im}(z)$ och $|z|^2 = 15$? (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Antag att $f(3) = 1$, $f'(3) = 2$ och $g'(9) = 2$. Beräkna $h'(3)$ om (2 p)

$$h(x) = g\big(x^2 f(x)\big).$$

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna $\sin\left(2\arctan\frac{3}{4}\right)$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

Anonym kod	TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2012-08-29	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

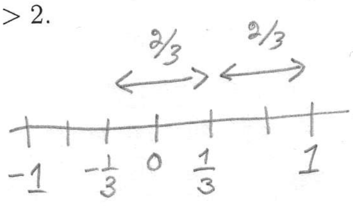
(a) Lös olikheten (svara med intervall) (2 p)

$$|3x - 1| > 2.$$

Lösning: $|3x-1| > 2$

$3|x-\frac{1}{3}| > 2$

$|x-\frac{1}{3}| > \frac{2}{3}$



$x < -\frac{1}{3}$ eller $x > 1$

Svar: $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$

(b) För vilka komplexa tal z gäller att $\text{Re}(z) = 2\text{Im}(z)$ och $|z|^2 = 15$? (2 p)

Lösning: $z = x + iy$

$\begin{cases} \text{Re}(z) = 2\,\text{Im}(z) \\ |z|^2 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + y^2 = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$ $z = \pm(2\sqrt{3} + i\sqrt{3})$

Svar: $z = \pm(2\sqrt{3} + i\sqrt{3})$

(c) Antag att $f(3) = 1$, $f'(3) = 2$ och $g'(9) = 2$. Beräkna $h'(3)$ om (2 p)

$$h(x) = g(x^2 f(x)).$$

Lösning: $h'(x) = g'(x^2 f(x))\, D(x^2 f(x)) = g'(x^2 f(x))(2x f(x) + x^2 f'(x))$

$h'(3) = g'(9f(3))(6f(3) + 9f'(3)) = g'(9)(6 + 9\cdot 2) = 2\cdot 24$

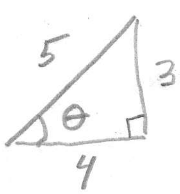
Svar: 48

(d) Beräkna $\sin\left(2\arctan\frac{3}{4}\right)$. (2 p)

Lösning:

$\sin\left(2\arctan\frac{3}{4}\right) = \sin(2\theta) =$

$= 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$



Svar: $\frac{24}{25}$

2(a) Linjen l_1: $\frac{x+3}{2} = y-5 = \frac{z-1}{3}$

Riktningsvektor: $v_1 = 2i + j + 3k$

Punkt på linjen: $P_1: (-3, 5, 1)$

Linjen l_2 ges av

$$\begin{cases} x+y+2z = 5 \\ x+y = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] (-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] (1) \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$z=1, \ y=t, \ x=3-t$

$$l_2: \begin{cases} x = 3-t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Riktningsvektor: $v_2 = -i + j + 0k$

En normalvektor till planet:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 3j + 3k = -3(i + j - k)$$

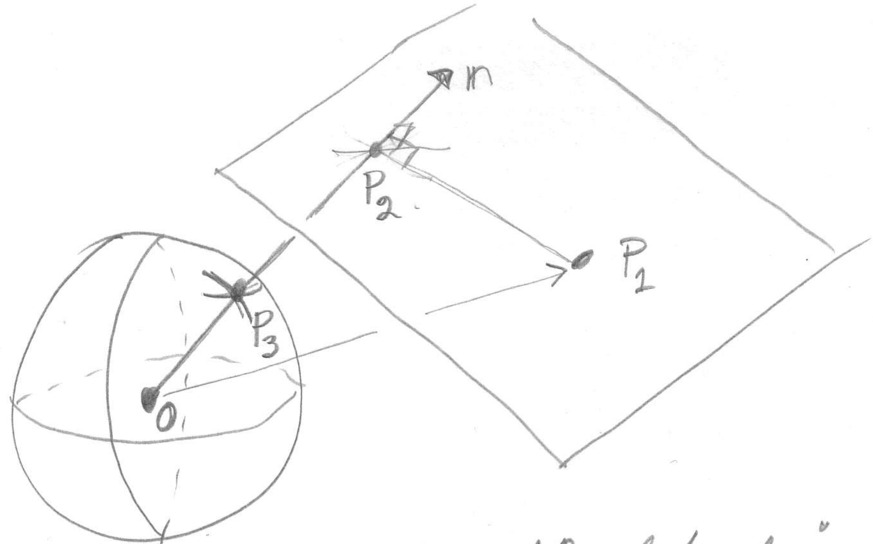
Vi väljer: $n = i + j - k$.

Planet ges av $(r - \overrightarrow{OP_1}) \cdot n = 0$

$$(x+3) + (y-5) - (z-1) = 0$$

$$\boxed{x + y - z = 1}$$

2(b)



Vi beräknar först avståndet från sfärens centrum (origo) till planet. Det är beloppet av skalära projektionen av vektorn $\vec{OP_1}$ på vektorn $\mathbf{n}$:

$$s = \left| \frac{\vec{OP_1} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{(-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}) \bullet (\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{3}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sfärens radie är $R = \frac{2}{\sqrt{101}}$.

Det sökta avståndet är:

$$|\vec{OP_2}| - |\vec{OP_3}| = s - R = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{101}}.$$

Obs att $s > R$ så att sfären skär inte planet.

(3

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1+1}{x^2-1} = 1 + \dfrac{1}{x^2-1}\,, \quad x \neq \pm 1.$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = 2\,\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$$

Kritiska punkter: $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Singulära punkter: $x = \pm 1.$

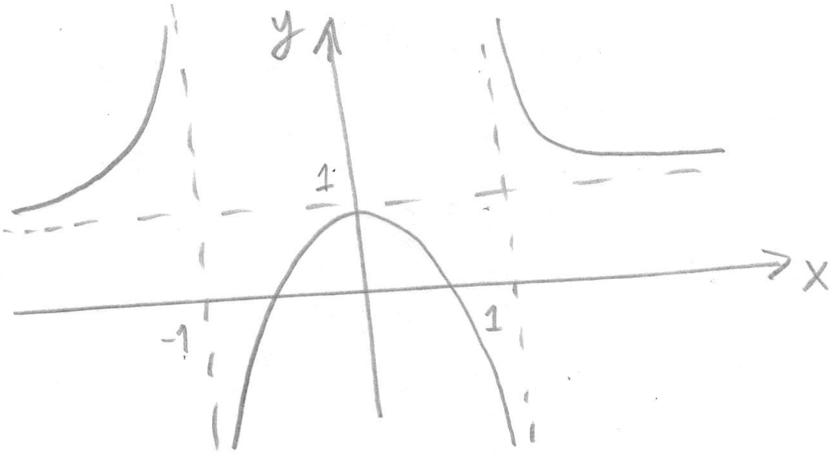
Inflektionspunkter: $x = \pm 1$

Gränsvärden: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow \cup$		$\nearrow \cap$	1	$\searrow \cap$		$\nearrow \cup$
$f''(x)$	$+$		$-$	-2	$-$		$+$



4(a) $$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \frac{(\sqrt{\ } - \sqrt{\ })(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })}{\sqrt{\ } + \sqrt{\ }} =$$ (4

$$= \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{x}{|x|} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \to -1 \cdot \frac{2}{2} = -1$$

då $x \to -\infty$

(b) $$\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))}{(x+O(x^3))^2} =$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2}+O(x^4)}{x^2+O(x^4)} = \frac{1}{2} \frac{1+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to \frac{1}{2}$$

då $x \to 0$

5. (a)
```
function y=SecondDerivative(f,x)
h=1e-5;
y=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/(h^2);
```

(b)
```
function x = KritiskNewton(f,x0,tol)
x = x0;
h = tol + 1;

while abs(h)>tol
   b = -Derivative(f,x);
   a = SecondDerivative(f,x);
   h = b/a;
   x = x + h;
end
```

(5

6) F, S, S, F, F, S

7) a) Se kompendiet "Beräkningsmatematik".

b) Antag: f är Lipschitz på I, dvs

$$(*) \quad |f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y \in I.$$

Vi ska visa att f är kontinuerlig i I,

dvs $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in I.$

Villkoret $(*)$ ger

$$|f(x)-f(a)| \le L|x-a| \to 0 \text{ då } x \to a,$$

så att $|f(x)-f(a)| \to 0$ då $x \to a$,

dvs $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$. V.S.B.

Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig på $[0,1]$ men inte Lipschitz.

8. a) f är kont. i a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) f är deriverbar i a om

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existerar.}$$

c) Låt $x, y \in (a,b)$ med $x<y$. Tillämpa medelvärdessatsen på intervallet $[x,y]$. Vi får $c \in (x,y)$ sådan att

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = 0, \text{ dvs } f(y) = f(x).$$

/Stig