

TMV225/176 Inledande Matematik M/TD
Övningstentamen 1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

2. De två räta linjerna l_1 och l_2 ges av

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = -2 \\ z = 3. \end{cases}$$

Finn alla punkter A, B där A ligger på l_1 och B ligger på l_2 , sådana att triangeln med hörn i A, B och origo är liksidig. (6 p)

3. (a) Bestäm den mest ekonomiska hastigheten och den minsta kostnaden för en 300 km lång transport med lastbil under följande förutsättningar: Chaufförens lön är 201 kr/h och olja och drivmedel kostar 12 kr/l. Vid hastigheten v km/h förbrukar lastbilen $2 + \frac{v^2}{300}$ liter olja och drivmedel per timme. Dessutom antas att $60 \leq v \leq 90$. (4 p)

(b) Antag att den totala kostnaden för transporten inte får avvika från den optimala med mer än 6%. Uppskatta hur stor avvikelsen från den optimala hastigheten får vara för att detta skall vara uppfyllt. Ledning: Använd Lipschitz-villkoret. (3 p)

4. Beräkna följande gränsvärden (utan l'Hospitals regel) (3+3 p)

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^6 + x^3 + 1} - \sqrt{x^6 - x^3 + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1+x^2)}$

5. (a) Skriv den funktionsfil `Newton.m` som du gjorde i datorövning 6 dvs givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras Newton's metod på denna data. Du kan anta att programmet `derivative.m` från datorövning 6 är given. (3 p)

- (b) Skriv nu en ny funktionsfil `NyNewton.m` som givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementerar Newton's metod precis som i datorövning 6 fast med följande förbättring: I varje iterationssteg kontrolleras först om $|f'(x_i)| > 0.01$ innan man bildar kvoten $f(x_i)/f'(x_i)$. Om detta inte stämmer avbryts programmet. Du kan anta att programmet `derivative.m` från datorövning 6 är given. (3 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

- (a) Om $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ och $g(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ så måste $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$.
- (b) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är vektorer i rummet med $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ så är $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ parallella.
- (c) För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.
- (d) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande på ett intervall I så är också $f(x) + g(x)$ växande på I .
- (e) Varje linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.
- (f) Om f är jämn på intervallet $[-a, a]$, så är f' udda på $[-a, a]$.

7. Formulera och bevisa Bolzano's sats för Lipschitz-kontinuerliga funktioner. (6 p)

8. (a) Formulera medelvärdessatsen. (1 p)

(b) Visa att $\sin x < x$ för alla $x \in (0, \infty)$. (2 p)

(c) Visa att $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ledning: Tillämpa medelvärdessatsen på funktionen $f(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2}$. (3 p)

Lycka till!
Stig och Hossein

Anonym kod	TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 20101023	Poäng
------------	---	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ x - y + z = 4 \\ 3x - 4y + 2z = 9. \end{cases}$$

Lösning:

Svar:

- (b) Antag att $f(2) = 7$ och $f'(2) = 5$. Beräkna $g'(2)$ om $g(x) = \frac{3x}{f(x)^2}$. (2 p)

Lösning:

Svar:

- (c) För vilka komplexa tal z gäller att $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$ och $|z|^2 = 8$. (2 p)

Lösning:

Svar:

- (d) Låt $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(4)$. (2 p)

Lösning:

Svar: