

TMV225/176 Inledande Matematik M/TD  
Övningstentamen 2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm det minsta avståndet från punkten  $\mathbf{x}_0 = (1, -3, 3)$  till det plan  $\pi$  som innehåller punkterna  $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, -1, 1)$  och  $\mathbf{x}_3 = (1, 2, 4)$ . (6 p)

3. Rita grafen till (6 p)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

4. (a) Beräkna ett approximativt värde till  $\sqrt{61}$  med hjälp av ett Taylor-polynom av ordning två kring någon lämplig punkt. Uppskatta hur många korrekta decimaler approximationen har. (3 p)

- (b) Beräkna Maclaurin-polynomet av ordning tre till funktionen (3 p)

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

genom att på ett lämpligt sätt kombinera Maclaurin-polynomen för  $\ln(1+x)$  och  $\ln(1-x)$ .

5. (a) Skriv den funktionsfil `Newton.m` som du gjorde i datorövning 6 dvs givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras Newton's metod på denna data. Du kan anta att programmet `derivative.m` från datorövning 6 är given. (3 p)

- (b) Skriv nu en ny funktionsfil `NyNewton.m` som givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementerar Newton's metod precis som i dataövning 6 fast med följande förbättring: Den approximerande sekvensen bildas med en så kallad dämpningsfaktor  $\alpha$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Vi utformar algoritmen så att följande sker i varje steg: Vi börjar med  $\alpha = 1$  och beräknar  $x_{k+1}$ . Därefter kontrollerar vi om  $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ , dvs. om vi har närmat oss en rot. Om så är fallet sparar vi  $x_{k+1}$  och går vidare med nästa steg, dvs. beräkna  $x_{k+2}$ . Om inte, räknar vi ut ett nytt värde på  $x_{k+1}$  fast den här gången med  $\alpha = 0.5$ . Om vi fortfarande inte har närmat oss en rot räknar vi ut ett nytt värde på  $x_{k+1}$  med  $\alpha = 0.25$  osv. Du kan anta att programmet `derivative.m` från datorövning 6 är given (3 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

- (a) Om  $f(0) = f''(0) = 0$  så är även  $f'(0) = 0$ .
- (b) Om  $f$  är deriverbar och  $f'$  är begränsad på ett intervall  $I$ , så är  $f$  begränsad på  $I$ .
- (c) Om  $f$  ej är deriverbar i punkten  $x_0$  så är  $f$  ej kontinuerlig i  $x_0$ .
- (d) Varje linjärt ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.
- (e) Om  $|f'(x)| \geq 1$  på ett intervall  $I$ , så kan inte  $f$  ha någon fixpunkt i  $I$ .
- (f) Om derivatan av  $f(g(x))$  och derivatan av  $f(x)$  är lika för alla  $x$ , så är  $g(x) = x$  för alla  $x$ .

7. Formulera och bevisa kontraktionsavbildningssatsen. (6 p)

8. (a) Formulera medelvärdessatsen. (1 p)

- (b) Antag att  $f$  är en deriverbar funktion på ett intervall  $I$ . Visa att om  $f$  har två olika nollställen på  $I$  så har  $f'$  minst ett nollställe på  $I$ . (2 p)

- (c) Antag att  $f$  är deriverbar på  $\mathbb{R}$ . Visa att om  $f'(x) \neq 1$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  så kan  $f$  ha högst en fixpunkt. (3 p)

Lycka till!  
Stig och Hossein

|            |                                                     |       |
|------------|-----------------------------------------------------|-------|
| Anonym kod | <b>TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 20101023</b> | Poäng |
|------------|-----------------------------------------------------|-------|

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Beräkna  $f'(1)$  då (2 p)

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2}.$$

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (b) Beräkna  $\sin \frac{\pi}{12}$ . (2 p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (c) Rita följande mängder i det komplexa talplanet. (1+1 p)

(i)  $\{z \in \mathbb{C}; |z - 1 - i| = 1\}$

(i)  $\{z \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\}$

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (d) Beräkna en Lipschitz-konstant till  $f(x) = \sqrt{x+1}$  på intervallet  $I = [0, 1]$ . (2 p)

**Lösning:**

**Svar:** .....