Kapitel 2

Lipschitz-kontinuitet

Vi börjar med att presentera den formella definitionen av gränsvärde och kontinuitet. Vi presenterar sedan en variant av kontinuitet som är lättare att använda och som ger ett kvantitativt mått på funktionens kontinuitet.

2.1 Den formella definitionen av gränsvärde

(Adams 1.5)

Definition 1. *(Gränsvärde) (Adams 1.5 Def 8) Vi säger att*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

om $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *sådant att*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in D(f) \text{ och } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Förkortningen $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ skall utläsas "för alla positiva tal ϵ existerar ett positivt tal δ".

Notera att definitionen kräver att f är definierad i en punkterad omgivning till a, dvs i en omgivning utom punkten a själv: $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Definitionen handlar om **noggrannhet**: Hur noggrannt, δ, måste vi ange x för att få en viss noggrannhet, ϵ, i $y = f(x)$?

Exempel 1. (Adams 1.5 Ex 1) Arean för en disk är $A = \pi r^2$. Vi vill tillverka en disk med arean 400π cm^2 med toleransen 5 cm^2. Hur nära den nominella radien 20 cm måste radien vara när vi svarvar disken?

Här är $A(r) = \pi r^2$, $L = 400\pi$, $a = 20$. Vi vill ha

$$|A(r) - L| = |\pi r^2 - 400\pi| < 5 = \epsilon.$$

Vi löser ut $r - 20$:

$$\begin{aligned} -5 &< \pi r^2 - 400\pi < 5 \\ 400 - 5/\pi &< r^2 < 400 + 5/\pi \\ \sqrt{400 - 5/\pi} &< r < \sqrt{400 + 5/\pi} \\ 19.96017 &< r < 20.03975 \\ -.03983 &< r - 20 < 0.03975 \end{aligned}$$

Den snävaste gränsen är den högra, så vi tar $\delta = 0.03975$. Då gäller

$$|r - 20| < 0.03975 = \delta \quad \Rightarrow \quad |\pi r^2 - 400\pi| < 5 = \epsilon.$$

$\square$

Med den formella definitionen av gränsvärde kan vi göra definitionen $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ av kontinuitet formell: Funktionen f är kontinuerlig i en inre punkt a till $D(f)$ om $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sådant att

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in D(f) \text{ och } |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Den formella definitionen behövs om man ska bevisa satser om gränsvärde och kontinuerliga funktioner. Till exempel, Adams 1.2 Theorem 2 om kombination av gränsvärden och satser om kontinuerliga funktioner i Adams 1.4. När man använder definitionen måste man bestämma δ som funktion av ϵ. Det är ofta svårt. Därför kommer vi att genomföra bevisen endast för en speciell klass av kontinuerliga funktioner: Lipschitz-kontinuerliga funktioner. För dessa finns ett enkelt samband mellan ϵ och δ, nämligen $\epsilon = L\delta$ för någon konstant L.

2.2 Lipschitz-kontinuitet

Definition 2. (Lipschitz-kontinuerlig funktion.) *Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I med Lipschitz-konstanten L om*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I. \tag{2.2}$$

Olikheten (2.2) kallas Lipschitz-villkor och vi säger ofta lite slarvigt att funktionen är Lipschitz istället för Lipschitz-kontinuerlig.

Notera vad definitionen säger. Det handlar om sambandet mellan noggrannheten i x och noggrannheten i $y = f(x)$. Om t ex $\hat{x}$ är en approximation till x med felet högst 10^{-6}, dvs

$$|\hat{x} - x| \le 10^{-6},$$

och $L = 10$, så blir felet i $y = f(x)$ högst 10^{-5},

$$|f(\hat{x}) - f(x)| \le L|\hat{x} - x| \le 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}.$$

Och detta gäller oavsett var i intervallet I talen $\hat{x}$ och x ligger. Dvs vi behöver inte veta exakt vilka $\hat{x}$ och x är, det räcker med en grov uppskattning om i vilket intervall de ligger. Vi får på detta vis en kvantitativ (= som kan mätas) information om felet.

Observera också att Lipschitz-konstanten inte är unik: om vi har hittat en Lipschitz-konstant så är varje större konstant också en Lipschitz-konstant för funktionen f på intervallet I. Det är bättre ju mindre konstant man hittar.

Exempel 2. En allmän linjär funktion

$$f(x) = mx + c \quad \text{med } I = \mathbf{R} = (-\infty, \infty).$$

Vi får

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(mx_1 + c) - (mx_2 + c)| = |m(x_1 - x_2)| = |m||x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

Vi kan alltså ta $L = |m|$. □

Exempel 3. En speciell linjär funktion

$$f(x) = -3x + 2 \quad \text{med } I = \mathbf{R} = (-\infty, \infty).$$

Vi får

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |-3||x_1 - x_2| = 3|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

Om vi vill att $|f(x_1) - f(x_2)| \le 10^{-3}$ så kan vi ta

$$3|x_1 - x_2| \le 10^{-3},$$

dvs

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{3}10^{-3}.$$

□

Exempel 4. En speciell kvadratisk funktion

$$f(x) = x^2 \quad \text{med } I = [-2, 2].$$

Vi får, med konjugatregeln och triangelolikheten,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq (\underbrace{|x_1|}_{\leq 2} + \underbrace{|x_2|}_{\leq 2})|x_1 - x_2| \leq (2+2)|x_1 - x_2| = 4|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

Alltså: $f(x) = x^2$ är Lipschitz med konstanten $L = 4$ på intervallet $[-2, 2]$. □

Exempel 5. $f(x) = x^2$ på $[2, 4]$. Vi får, som förut,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq (\underbrace{|x_1|}_{\leq 4} + \underbrace{|x_2|}_{\leq 4})|x_1 - x_2| \\ \leq (4+4)|x_1 - x_2| = 8|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [2, 4]. \end{aligned}$$

Alltså: $f(x) = x^2$ är Lipschitz med konstanten $L = 8$ på intervallet $[2, 4]$. □

Notera att Lipschitz-konstanten beror både på funktionen och intervallet. Löst uttryckt: L är maximala lutningen på intervallet I tagen med absolutbelopp. Vi ska senare se att om funktionen är deriverbar så är

$$L = \max_{x \in I} |f'(x)|.$$

Men alla funktioner är inte deriverbara så vi vill inte använda detta nu.

Exempel 6. $f(x) = x^2$ på $\mathbf{R}$. Denna är ej Lipschitz på det angivna intervallet för

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2|,$$

där kvantiteten $|x_1 + x_2|$ kan bli hur stor som helst, "$L = \infty$". □

Exempel 7. $f(x) = \sqrt{x}$ på $[1, \infty)$. Vi får med konjugatregeln

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| &= \left| \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Här använde vi att $x_1, x_2 \geq 1$ så att $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 2$ och därmed

$$\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2}$$

Alltså är $\sqrt{x}$ Lipschitz på $[1, \infty)$ med konstanten $\frac{1}{2}$.

Men $\sqrt{x}$ är inte Lipschitz på $[0, 1]$, för på det intervallet kan $\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$ bli hur stor som helst. Kvadratroten är inte Lipschitz på något intervall som innehåller punkten 0. □

Nu ska vi visa att Lipschitz-kontinuerliga funktioner verkligen är kontinuerliga enligt vår gamla definition (2.1) (se även Adams 1.4 Definition 4 och 7 och Adams 1.5 Definition 8.) Obs: enkelt bevis.

Sats 1. *Om f är Lipschitz-kontinuerlig på I så är f kontinuerlig på I.*

Bevis. Vad vet vi? Jo, enligt antagandet vet vi att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I. \tag{2.3}$$

Vad ska vi visa? Tag $c \in I$. Vi ska visa att f är kontinuerlig i c, dvs

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Om c är en ändpunkt till intervallet så ska gränsvärdet vara enkelsidigt:

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c) \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to c+} f(x) = f(c).$$

Detta betyder enligt den formella definitionen (Adams 1.5, Definition 8): $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon)$ sådant att

$$0 < |x - c| < \delta \text{ och } x \in I \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon. \tag{2.4}$$

Vi tar då ett $\epsilon > 0$ och försöker hitta δ så att (2.4) gäller. Lipschitz-villkoret (2.3) ger

$$|f(x) - f(c)| \leq L|x - c| \quad \forall x \in I.$$

Vi vill att $L|x - c| < \epsilon$. Detta gäller om

$$|x - c| < \frac{1}{L}\epsilon.$$

Vi kan alltså ta $\delta = \frac{1}{L}\epsilon$. Då gäller (2.4). Beviset är klart. □

Observera i det föregående beviset att vi kan ta $\delta = \frac{1}{L}\epsilon$, dvs att δ är proportionell mot ϵ. Det är anledningen till att det är lättare att räkna med Lipschitz-kontinuerliga funktioner. Nackdelen är att inte alla kontinuerliga funktioner är Lipschitz-kontinuerliga. Det är dock ingen stor nackdel i praktiken.

Exempel 8. Vi återvänder till Exempel 1 om att tillverka en disk. Vi betraktar då funktionen $A(r) = \pi r^2$ på intervallet $0 \leq r \leq 25$. Vi beräknar en Lipschitz-konstant som i Exempel 5:

$$|A(r_1) - A(r_2)| \leq \pi(25 + 25)|r_1 - r_2| = 50\pi|r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in [0, 25],$$

dvs $L = 50\pi$. Vi vill ha

$$|A(r) - A(20)| = |\pi r^2 - 400\pi| < \epsilon = 5.$$

Vi ska åstadkomma detta genom att ta $|r - 20| < \delta$. Tillsammans med Lipschitz-villkoret ger detta

$$|A(r) - A(20)| \leq L|r - 20| < L\delta \leq \text{ (vi vill) } \leq \epsilon.$$

Vi löser ut δ:

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{L} = \frac{5}{50\pi} = \frac{1}{10\pi} = 0.0318309...$$

Vi tar $\delta = 0.03183$. Lite sämre tolerans än i den mer exakta beräkningen i Exempel 1 men mycket enklare. □

Ett intervall är begränsat (“bounded”) om det inte når ut till oändligheten, dvs

$$(a, b),\ \ [a, b),\ \ (a, b] \text{ eller } [a, b]. \tag{2.5}$$

Ett sådant intervall kan också kallas ändligt (“finite”) som i Adams 1.4 sid 82 (sid 80, 6e uppl). En funktion är begränsad (“bounded”) på intervallet I om dess värden inte når ut till oändligheten (Adams 1.4, sid 83 (sid 81, 6e uppl)), dvs om det finns en begränsning M sådan att

$$|f(x)| \le M \quad \forall x \in I. \tag{2.6}$$

Vi ska nu visa att en Lipschitz-kontinuerlig funktion inte hinner ut till oändligheten på ett begränsat intervall. Enkelt bevis!

Sats 2. *Om f är Lipschitz på ett begränsat intervall I, så är f begränsad på I.*

Bevis. Eftersom I är begränsat så är det av formen (2.5). Vi måste hitta en konstant M så att (2.6) gäller. Tag en punkt $c \in I$. Lipschitz-villkoret ger för alla $x \in I$:

$$|f(x)| = |f(x) - f(c) + f(c)| \le |f(x) - f(c)| + |f(c)| \le L|x - c| + |f(c)| \le L(b - a) + |f(c)|.$$

Vi tar alltså $M = L(b - a) + |f(c)|$. □

Vi kan kombinera Lipschitz-kontinuerliga funktioner. Detta är Lipschitz-motsvarigheten till Adams 1.4 Theorem 6.

Sats 3. *Antag att f och g är Lipschitz på I med konstanter L_f och L_g och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är följande kombinationer också Lipschitz på I. I (b) och (c) antar vi dessutom att f och g är begränsade på I med begränsningar M_f och M_g.*

(a) linjär kombination: $\alpha f + \beta g$ med $L = |\alpha|L_f + |\beta|L_g$;

(b) produkt: fg med $L = M_f L_g + M_g L_f$;

(c) kvot: $\dfrac{f}{g}$, om $|g(x)| \ge a\ \forall x \in I$ och något $a > 0$, med $L = (M_f L_g + M_g L_f)/a^2$.

Antag att g är Lipschitz på I_1 med konstant L_g och att f är Lipschitz på I_2 med konstant L_f. Antag dessutom att $g(x) \in I_2$ för alla $x \in I_1$. Då är också den sammasatta funktionen $f \circ g$ Lipschitz på I_1.

(d) komposition: $f \circ g$ med $L = L_f L_g$.

Bevis. (Det räcker om du lär ett av dessa.) Bevis av (a):

$$\begin{aligned}
|(\alpha f + \beta g)(x_1) - (\alpha f + \beta g)(x_2)| &= |(\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)) - (\alpha f(x_2) + \beta g(x_2))| \\
&= |\alpha(f(x_1) - f(x_2)) + \beta(g(x_1) - g(x_2))| \\
&\le |\alpha||f(x_1) - f(x_2)| + |\beta||g(x_1) - g(x_2)| \\
&\le |\alpha|L_f|x_1 - x_2| + |\beta|L_g|x_1 - x_2| \\
&= (|\alpha|L_f + |\beta|L_g)|x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Lipschitz-konstanten blir $L = |\alpha|L_f + |\beta|L_g$.

Bevis av (b):

$$\begin{aligned}
|(fg)(x_1) - (fg)(x_2)| &= |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\
&\le |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)| + |f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |f(x_1)||g(x_1) - g(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)||g(x_2)| \\
&\le M_f L_g|x_1 - x_2| + L_f|x_1 - x_2|M_g \\
&= (M_f L_g + M_g L_f)|x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Lipschitz-konstanten blir $L = M_f L_g + M_g L_f$.

Bevis av (c):

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{f}{g}(x_1) - \frac{f}{g}(x_2)\Big| &= \Big|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_2)}{g(x_2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)}{g(x_1)g(x_2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2) + f(x_2)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)}{g(x_1)g(x_2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{(f(x_1) - f(x_2))g(x_2) + f(x_2)(g(x_2) - g(x_1))}{g(x_1)g(x_2)}\Big| \\
&= \frac{|(f(x_1) - f(x_2))g(x_2) + f(x_2)(g(x_2) - g(x_1))|}{|g(x_1)||g(x_2)|} \\
&\le \frac{|f(x_1) - f(x_2)||g(x_2)| + |f(x_2)||g(x_2) - g(x_1)|}{|g(x_1)||g(x_2)|} \\
&\le \frac{(L_f M_g + M_f L_g)|x_1 - x_2|}{a^2} \\
&= \frac{(M_f L_g + M_g L_f)}{a^2}|x_1 - x_2|.
\end{aligned}
$$

Lipschitz-konstanten blir $L = (M_f L_g + M_g L_f)/a^2$.

Bevis av (d):

$$
\begin{aligned}
|(f \circ g)(x_1) - (f \circ g)(x_2)| &= |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \\
&\le L_f|g(x_1) - g(x_2)| \le L_f L_g |x_1 - x_2|.
\end{aligned}
$$

Lipschitz-konstanten blir $L = L_f L_g$. □

Om funktionen är deriverbar kan man beräkna Lipschitz-konstanten enkelt.

Sats 4. (Beräkning av Lipschitz-konstant med hjälp av derivata) *Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) med begränsad derivata,*

$$|f'(x)| \le M \quad \forall x \in (a, b).$$

Då gäller

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Slutsatsen är alltså att f är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, b]$ med konstanten $L \le M$.

Bevis. Tag två punkter $x_1, x_2 \in [a, b]$ med $x_1 < x_2$. Tillämpa Medelvärdessatsen (Adams 2.8 (2.6, 6e uppl) Theorem 11) på intervallet $[x_1, x_2]$. Vi får en (okänd) punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

dvs

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)(x_2 - x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \le M|x_2 - x_1|.$$

□

Övningar

Bestäm en Lipschitz-konstant för följande funktioner. Gör både ett direkt bevis (om det går) och ett som baseras på Sats 3.

Obs: man behöver inte bestämma den bästa (minsta) möjliga Lipschitz-konstanten, det räcker att hitta en konstant L som inte är överdrivet stor. Dvs man får förenkla och räkna approximativt.

1. $h(x) = x^3$ på $[0, 2]$
2. $h(x) = \dfrac{1}{x}$ på $[1, 10]$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ på $[1, 10]$
4. $h(x) = \sqrt{x}$ på $[0.01, 1]$
5. $h(x) = 4x^2 - 3x$ på $[-1, 1]$
6. $h(x) = \frac{x^2}{x+1}$ på $[0, 1]$
7. Ur en cylindrisk trädstam med radien 3 dm skall sågas en balk med rektangulärt tvärsnitt. Böjmotståndet W (som har enheten dm^3) hos en sådan balk ges av formeln
$$W = \frac{xy^2}{6}$$
där x betecknar bredden och y höjden. Balkens tvärsnitt är alltså en rektangel med bredden x och höjden y vars hörn ligger på en cirkel med radien $R = 3$ dm. Det betyder att
$$\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{2}\Big)^2 = R^2, \quad \text{dvs } y^2 = 4R^2 - x^2 = 36 - x^2.$$
Vi eliminerar y ur $W = \frac{1}{6}xy^2$ och får en funktion av x:
$$W(x) = \frac{1}{6}x(36 - x^2), \quad x \in [0, 6].$$
Vi vill tillverka en balk med böjmotståndet 13.5 dm^3, vilket svarar mot att sidan x är 3 dm. Antag att böjmotståndet inte får avvika från det nominella värdet 13.5 dm^3 med mer än 0.1 dm^3. Uppskatta hur stor noggrannheten i bredden måste vara för att detta skall vara uppfyllt. Ledning: Använd Lipschitz-villkoret.
8. Vinkelfrekvensen f hos en pendel beror på pendelns längd x enligt formeln $f(x) = \sqrt{g/x}$, där $g = 9.81$ m/s^2 är tyngdkraftsaccelerationen. För att det ska gå att räkna för hand använder vi $g = 9$ m/s^2, dvs $f(x) = \sqrt{9/x}$. Vi vill tillverka en pendel med vinkelfrekvensen 1 s^{-1} med toleransen 0.01 s^{-1} och nominella längden 9 m. Hur noggrannt måste längden göras? Använd Lipschitz-villkoret för f.

Svar

1. $L = 12$
2. $L = 1$
3. grov uppskattning $L = 20$, bästa möjliga $L = 2$
$$\Big|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\Big| = \Big|\frac{(x+y)(y-x)}{x^2y^2}\Big| = \frac{|x+y||y-x|}{x^2y^2} = \frac{x+y}{x^2y^2}|x-y| \le \frac{10+10}{1\cdot 1}|x-y| = 20|x-y|$$
$$\Big|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\Big| = \frac{x+y}{x^2y^2}|x-y| = \Big(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\Big)|x-y| \le (1+1)|x-y| = 2|x-y|$$

4. $L = 5$

5. $L = 11$

6. $L = 5$, $a = 1$, $M_g = 2$, $L_g = 1$, $M_f = 1$, $L_f = 2$

7. Vi börjar med att beräkna en Lipschitz-konstant för W på intervallet $[0, 6]$.

$$|W'(x)| = |\tfrac{1}{2}(12 - x^2)| = \tfrac{1}{2}|12 - x^2| \leq \tfrac{1}{2}(12 + x^2) \leq \tfrac{1}{2}(12 + 36) = 24 \quad \forall x \in [0, 6],$$

vilket ger en Lipschitz-konstant $L = 24$ enligt Sats 4.

Vi har de nominella värdena för sidan $a = 3$ och och böjmotståndet $W(a) = 13.5$. Vi vill bestämma en tolerans δ för felet $|x - a|$ som garanterar att felet $|W(x) - W(a)| < \epsilon = 0.1$.

Lipschitz-villkoret ger att

$$|W(x) - W(a)| \leq L|x - a| < \epsilon = 0.1$$

blir uppfyllt om

$$|x - a| < \delta = \frac{\epsilon}{L} = \frac{0.1}{24}.$$

Vi förenklar ytterligare lite och väljer en lite mindre tolerans $\delta = \frac{0.1}{25} = 0.004$ dm.

I det här enkla exemplet kan vi med en lite noggrannare uppskattning räkna ut exakt värde för derivatans maximum och får den bästa möjliga Lipschitz-konstanten

$$L = \max_{x \in [0,6]} |W'(x)| = \max_{x \in [0,6]} \tfrac{1}{2}|12 - x^2| = \tfrac{1}{2}|12 - 36| = 12.$$

Då blir toleransen

$$\delta = \frac{0.1}{12} \approx 0.008 \quad \text{(avrundat nedåt)}.$$

8. Vi använder $f(x) = \sqrt{9/x} = 3x^{-1/2}$. Vi har nominella värden $a = 9$ m och $f(a) = 1$ s^{-1} och toleransen $\epsilon = 0.01$. Vi bestämmer en Lipschitz-konstant på intervallet $[8, 10]$ (ett lagom intervall kring 9).

$$|f'(x)| = |-\frac{3}{2}x^{-3/2}| = \frac{3}{2}x^{-3/2} \leq \frac{3}{2}8^{-3/2} = \frac{3}{2}\frac{1}{8^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{1}{16\sqrt{2}} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{16} = \frac{3}{32} \leq \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Vi tar $L = 0.1$.

Antag $|x - a| = |x - 9| < \delta$. Lipschitz-villkoret ger

$$|f(x) - 1| = |f(x) - f(a)| \leq L|x - a| < L\delta$$

Vi får $|f(x) - 1| < \epsilon$ om $L\delta \leq \epsilon$, dvs om

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{L} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$$