

Kapitel 3

Talföljder

Vi introducerar talföljder och konvergens av talföljder. Se också Adams 9.1.

3.1 Definition av talföljd

En talföljd är en oändlig följd av tal som räknas upp i en bestämd ordning, t ex,

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Vi betecknar hela följden med en bokstav och numrerar termerna med de naturliga talen

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Exemplen ovan kan då skrivas

$$a = \{1, 2, 3, \dots\} = \{k\}_{k=1}^{\infty},$$
$$b = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\} = \{(-\frac{1}{2})^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Här ges alltså a_k av en formel, $a_k = k$, men också av en algoritm (en rekursion) $a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + 1$. På samma vis har vi $b_k = (-\frac{1}{2})^{k-1}$ och rekursionen $b_1 = 1$, $b_k = -\frac{1}{2}b_{k-1}$. Anledningen till att vi studerar talföljder är att våra matematiska (och numeriska) algoritmer ofta genererar talföljder.

De första, säg 100, termerna av följden b genereras enkelt med MATLAB:

```
>> k=1:100;  
>> b=(-0.5).^ (k-1);  
>> b=b'
```

Följden a ovan är ett exempel på en *aritmetisk talföljd med differensen d* :

$$a_k = a_{k-1} + d,$$

medan b är exempel på en *geometrisk talföljd med kvoten q* :

$$a_k = qa_{k-1}.$$

En talföljd kan också ses som en funktion från de naturliga talen till de reella:

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(n) = a_n.$$

3.2 Konvergens, gränsvärde

Definition 1. Vi säger att följden $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet L ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

om för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett naturligt tal N sådant att

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Vi skriver också

$$a_n \rightarrow L \quad \text{då } n \rightarrow \infty,$$

vilket utläses “ a_n går mot L då n går mot oändligheten”. Observera att N beror på ϵ . Att $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet L betyder i praktiken att vi kan approximera L med godtycklig noggrannhet med hjälp av följden a . Talet ϵ är approximationsfelet, t ex, $\epsilon = 10^{-6}$ betyder att vi har 5 decimalers noggrannhet. Talet N anger hur många steg av algoritmen som genererar a_n som vi måste utföra för att uppnå denna noggrannhet.

Tre grundläggande exempel:

Exempel 1. Konstant följd: $a_n = 1$. Då gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Bevis. Tag ett tal $\epsilon > 0$ och bestäm $N = N(\epsilon)$. Vi har

$$|a_n - L| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$$

för alla n . Vi kan alltså ta $N = 1$. □

Exempel 2. Följden $a_n = 1/n$, dvs $a = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Då gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bevis. Tag ett tal $\epsilon > 0$ och bestäm $N = N(\epsilon)$. Vi har

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

om $n > 1/\epsilon$. Vi kan ta $N = \lceil \epsilon^{-1} \rceil$. (Här är $\lceil x \rceil$ heltalstakfunktionen, som avrundar uppåt till heltal, se Adams P.5, i MATLAB `ceil(x)`.) □

Exempel 3. Geometrisk följd: $a_n = q^n$, dvs $a = \{q, q^2, q^3, \dots\}$. Då gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{om och endast om } |q| < 1.$$

Bevis. Antag $|q| < 1$. Tag ett tal $\epsilon > 0$ och bestäm $N = N(\epsilon)$. Vi har

$$|a_n - L| = |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \epsilon,$$

vilket är ekvivalent med $n \ln(|q|) = \ln(|q|^n) < \ln(\epsilon)$, där vi använt att logaritmen är en strängt växande funktion. Att $|q| < 1$ medför att $\ln(|q|) < 0$ så att vårt villkor är ekvivalent med

$$n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)}.$$

Vi kan ta $N = \lceil \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)} \rceil$. Alltså: $q^n \rightarrow 0$.

Antag sedan $|q| \geq 1$. Vi har

$$|a_n - L| = |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \geq 1,$$

vilket aldrig kan bli mindre än ett litet ϵ . Alltså: q^n går inte mot 0. □

Till exempel: $q = -\frac{1}{2}$, $\epsilon = 10^{-6}$ ger

$$N = \left\lceil \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(\frac{1}{2})} \right\rceil = \left\lceil \frac{-6 \ln(10)}{-\ln(2)} \right\rceil \approx \lceil 19.93 \rceil = 20.$$

Det vill säga: $n \geq 20 \Rightarrow |(-\frac{1}{2})^n| \leq 10^{-6}$. □

En följd kallas *divergent* om den inte är konvergent.

Exempel 4. Följden $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ har inget gränsvärde, den är divergent. □

Denna följd divergerar eftersom den hoppar mellan två värden och därför inte närmar sig något. Ett annat sätt att divergera är att följderna växer obegränsat, dvs divergerar mot oändligheten.

Definition 2. Följden $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ divergerar mot oändligheten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (\text{eller } a_n \rightarrow \infty),$$

om för varje naturligt tal M finns ett naturligt tal N sådant att

$$n \geq N \Rightarrow a_n > M.$$

På liknande sätt definieras divergens mot minus oändligheten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (\text{eller } a_n \rightarrow -\infty).$$

Exempel 5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Bevis. Tag ett naturligt tal M och bestäm $N = N(M)$. Vi har

$$a_n = n > M$$

om $n \geq N = M + 1$. □

3.3 Kombination av gränsvärden

Sats 1. Antag att $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är konvergenta följder och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\text{linjär kombination}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad (\text{produkt}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{om } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \quad (\text{kvot}).$$

Vi bevisar inte denna sats. Den gör det möjligt att kombinera de grundläggande gränsvärdena i Exempel 1–3 och få stort antal nya gränsvärden.

Exempel 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = 0$. Bevis: Exempel 2 och produktregeln ger

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \right)^2 = 0^2 = 0. \quad \square$$

Exempel 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$ är ekvivalent med $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Det räcker alltså att beräkna gränsvärden som är noll. Bevis: Linjärkombination och Exempel 1 ger

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L \cdot 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - L \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - L. \quad \square$$