

Kapitel 4

Bisektionsalgoritmen

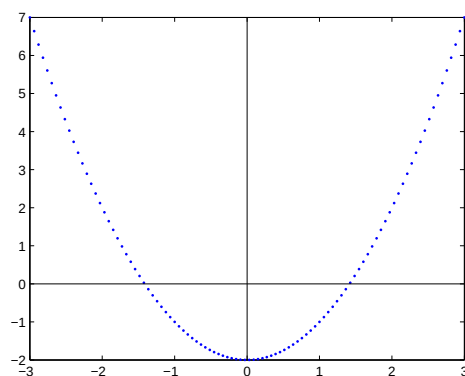
Vi ska konstruera lösningar till algebraiska ekvationer av formen $f(x) = 0$ med hjälp av *bisektionsalgoritmen* (intervallhalveringsmetoden). På samma gång ska vi se hur man definierar de reella talen och bevisar *Bolzanos sats* och *Satsen om mellanliggande värden* (Adams 1.4, Theorem 9). Vi gör detta först i form av ett exempel: kvadratroten ur 2.

4.1 Kvadratroten ur 2

Figur 4.1 visar grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 2$. Grafen antyder att ekvationen

$$x^2 - 2 = 0$$

har exakt en positiv lösning (och en negativ). Den positiva lösningen är naturligtvis $\sqrt{2}$. Men vi



Figur 4.1: Funktionen $f(x) = x^2 - 2$.

börjar med att visa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal och därför inte kan representeras exakt på datorn. Sedan skall vi konstruera och definiera talet $\sqrt{2}$ som ett nytt slags tal: reellt tal.

Påstående. *Ekvationen $x^2 - 2 = 0$ har ingen rationell lösning.*

Bevis. Antag att $x \in \mathbf{Q}$ (rationellt tal) uppfyller $x^2 - 2 = 0$. Vi skriver $x = p/q$ där $p, q \in \mathbf{Z}$ (hela tal) och där vi förkortat så att p och q inte har några gemensamma faktorer. Ekvationen $x^2 - 2 = 0$ ger då

$$p^2 = 2q^2,$$

vilket betyder att p innehåller faktorn 2, dvs $p = 2r$ för något heltal r . Men då blir $x = 2r/q$ och $x^2 = 2$ ger

$$\frac{4r^2}{q^2} = 2, \quad \text{dvs} \quad q^2 = 2r^2,$$

så att även q är delbart med 2. Men detta är en motsägelse till vårt antagande att vi har förkortat p/q . Alltså kan inte x vara ett rationellt tal. $\square$

Konstruktion av $\sqrt{2}$

Låt $f(x) = x^2 - 2$. Vi söker $\bar{x}$ sådant att $f(\bar{x}) = 0$. Vi ser att

$$f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 2 > 0,$$

och drar slutsatsen att $\bar{x} \in [1, 2]$. Låt nu

$$x_0 = 1, \quad X_0 = 2, \quad \hat{x}_0 = 1.5,$$

där $\hat{x}_0$ är mittpunkten på intervallet $[x_0, X_0]$. Vi ser att $f(\hat{x}_0) = 2.25 - 2 = 0.25 > 0$ och roten bör ligga i intervallet $[1, 1.5]$. Låt då

$$x_1 = x_0 = 1, \quad X_1 = \hat{x}_0 = 1.5.$$

Det aktuella intervallet är nu $[x_1, X_1] = [1, 1.5]$. Vi bildar mittpunkten

$$\hat{x}_1 = (x_1 + X_1)/2 = 1.25.$$

Nu är $f(\hat{x}_1) = (1.25)^2 - 2 = -0.4375 < 0$. Vi sätter då

$$x_2 = \hat{x}_1 = 1.25, \quad X_2 = X_1 = 1.5.$$

Vi har tabellen

i	x_i	X_i
0	1	2
1	1	1.5
2	1.25	1.5

Proceduren kan upprepas hur många gånger som helst. Den kallas *bisektionsalgoritmen*. Kör programmet [bisektdemo.m](#) med funktionsfilen [funk.m](#) för att göra en längre tabell. (Filerna finns under länken "Matlab/facit" på kurshemsidan.) Det verkar som om en decimalutveckling växer fram.

x_i	X_i
1.00000000000000	2.00000000000000
1.00000000000000	1.50000000000000
1.25000000000000	1.50000000000000
1.37500000000000	1.50000000000000
1.37500000000000	1.43750000000000
1.40625000000000	1.43750000000000
1.40625000000000	1.42187500000000
1.41406250000000	1.42187500000000
1.41406250000000	1.41796875000000
1.41406250000000	1.41601562500000
1.41406250000000	1.41503906250000
1.41406250000000	1.41455078125000
1.41406250000000	1.41430664062500
1.41418457031250	1.41430664062500
1.41418457031250	1.41424560546875
1.41418457031250	1.41421508789063
1.41419982910156	1.41421508789063
1.41420745849609	1.41421508789063
1.41421127319336	1.41421508789063
1.41421318054199	1.41421508789063
1.41421318054199	1.41421413421631
1.41421318054199	1.41421365737915
1.41421341896057	1.41421365737915
1.41421353816986	1.41421365737915
1.41421353816986	1.41421359777451
1.41421353816986	1.41421356797218
1.41421355307102	1.41421356797218

Man kan ställa sig följande frågor:

1. Hur kan vi veta att det är en decimalutveckling? (Vi kan ju aldrig beräkna alla decimalerna, bara ändligt många.)
2. Hur kan vi veta att decimalutvecklingen löser ekvationen?
3. Finns det någon annan decimalutveckling som löser ekvationen?

Svar på Fråga 1

Bisektionsalgoritmen konstruerar två följder $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ och $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ av rationella tal. Om $j > i$ förhåller de sig så här:

$$x_i \leq x_j \leq \bar{x} \leq X_j \leq X_i.$$

Vi drar slutsatsen att vi har följande avstånd:

$$(4.1) \quad |x_i - X_i| = 2^{-i} \quad (\text{vi har halverat intervallet } [1, 2] \text{ } i \text{ gånger})$$

$$(4.2) \quad |x_i - x_j| \leq 2^{-i} \quad \text{för } j \geq i,$$

$$(4.3) \quad |X_i - X_j| \leq 2^{-i} \quad \text{för } j \geq i.$$

Olikheterna (4.2) och (4.3) innebär att $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ och $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ bildar decimalutvecklingar: om $2^{-i} < 10^{-N-1}$ så har vi N fixerade decimaler. Låt oss räkna ut hur många steg av algoritmen vi ska köra för att få N decimaler. Eftersom $2^{10} = 1024 > 10^3$ så får vi

$$2^{-i} = (2^{-10})^{i/10} < 10^{-3i/10} \leq (\text{vi vill}) \leq 10^{-N-1}.$$

Om vi tar $i \geq 10(N+1)/3$ så får vi $2^{-i} < 10^{-N-1}$, dvs vi har N fixerade decimaler (vi vinner ungefär 3 decimaler per 10 steg).

Vi har alltså två decimalutvecklingar. Vi betecknar dem med

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1.4142135\dots, \\ \bar{X} &= \lim_{i \rightarrow \infty} X_i = 1.41421356\dots\end{aligned}$$

Likheten (4.1) innebär att decimalutvecklingarna är lika. Med $2^{-i} < 10^{-N-1}$ överensstämmer x_i och X_i till N decimaler. Alltså:

$$\bar{x} = \bar{X} = 1.41421356\dots$$

Vi skriver

$$\sqrt{2} = \bar{x} = \bar{X} = 1.41421356\dots$$

Vilket innebär att vi satt ett namn, $\sqrt{2}$, på den decimalutveckling som vi konstruerat.

Svar på Fråga 2

Vi vill visa att $f(\sqrt{2}) = 0$ dvs $(\sqrt{2})^2 = (1.41421356\dots)^2 = 2$. Vi visar att detta gäller i form av gränsvärdet

$$(4.4) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0,$$

dvs $\forall \epsilon > 0 \exists N$ sådant att

$$(4.5) \quad i \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x_i) - 0| < \epsilon.$$

Tag då ett $\epsilon > 0$ och försök bestämma N sådant att (4.5) gäller. Kom ihåg att $f(x) = x^2 - 2$ är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$ med Lipschitz-konstanten $L = 4$. Med Lipschitz-villkoret och (4.1) får vi

$$|f(x_i) - 0| = \underbrace{|f(x_i)|}_{<0} = -f(x_i) < \underbrace{f(X_i) - f(x_i)}_{>0} = |f(X_i) - f(x_i)| \leq 4|X_i - x_i| = 4 \cdot 2^{-i} < \epsilon,$$

om $i > \ln(\epsilon/4)/\ln(1/2) = \ln(4/\epsilon)/\ln(2)$. Vi kan ta $N = \lceil \ln(4/\epsilon)/\ln(2) \rceil$ (heltalstaket=avrunda uppåt). Detta visar (4.5).

Svar på Fråga 3

Finns det fler lösningar? Vi noterar först att funktionen $f(x) = x^2 - 2$ är strängt växande för $x \geq 0$, dvs

$$0 \leq x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y).$$

(Bevis av detta: $f(y) - f(x) = y^2 - 2 - (x^2 - 2) = y^2 - x^2 = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(y+x)}_{>0} > 0$.)

Antag nu att det finns två icke-negativa lösningar x, y med $0 \leq x < y$. Men då är $0 = f(x) < f(y) = 0$ vilket är omöjligt. Alltså är $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ den enda icke-negativa lösningen.

Sammanfattning

1. Vi har konstruerat en approximerande följd x_i .
2. Vi har visat att följden bildar en decimalutveckling $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$.
3. Vi har visat att $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$, dvs $f(\bar{x}) = 0$.
4. Vi har visat att det finns bara en icke-negativ lösning, dvs alla konstruktioner ger samma resultat.

4.2 Reellt tal=decimalutveckling=Cauchy-följd

De reella talen är mängden av alla decimalutvecklingar (ändliga, periodiska eller icke-periodiska). Vi har sett att olikheterna (4.2) och (4.3),

$$|x_i - x_j| \leq 2^{-i}, \quad |X_i - X_j| \leq 2^{-i} \quad \text{för } j \geq i,$$

garanterar att följderna bildar decimalutvecklingar. Antag att vi har en decimalutveckling,

$$a = p.q_1q_2q_3q_4\dots,$$

där p är heltalsdelen. Om vi trunkerar efter n decimaler,

$$a_n = p.q_1q_2q_3q_4\dots q_n,$$

så får vi en följd $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, sådan att

$$|a_i - a_j| < 10^{-i} \quad \text{för } j \geq i.$$

Det beror på att $a_j - a_i$ ges av

$$\begin{array}{r} p \quad .q_1 \dots q_i \quad q_{i+1} \dots q_j \\ -p \quad .q_1 \dots q_i \\ \hline 0 \quad .0 \dots 0 \quad q_{i+1} \dots q_j \end{array}$$

dvs $|a_i - a_j| = |0.q_{i+1} \dots q_j| \cdot 10^{-i} < 10^{-i}$.

Å andra sidan, om en följd uppfyller

$$|a_i - a_j| < 10^{-n-1} \quad \text{för } j \geq i,$$

så stämmer de n första decimalerna i a_i överens med de n första decimalerna i a_j för alla $j \geq i$. Dvs en decimalutveckling växer fram. Vi skriver då

$$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i,$$

där a är decimalutvecklingen = reella talet. En sådan följd kallas Cauchy-följd.

Definition 1. (Cauchy-följd) En talföljd $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ kallas Cauchy-följd om $\forall \epsilon > 0 \exists N$ sådant att

$$i, j \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_i - a_j| < \epsilon.$$

Som vi sett betyder detta att följdens genererar en decimalutveckling. Toleransen ϵ anger antalet decimaler: $\epsilon = 10^{-n-1}$ betyder n korrekta decimaler.

Exempel 1. $a_n = 1/n$. Antag $j \geq i$. Då får vi

$$|a_i - a_j| = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| = \frac{1}{i} - \frac{1}{j} < \frac{1}{i} \leq (\text{vi vill}) \leq \epsilon.$$

Vi löser ut i . Vi får $i \geq 1/\epsilon$. Vi tar $N = \lceil 1/\epsilon \rceil$. Då gäller

$$j \geq i \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_i - a_j| < 1/i \leq 1/N \leq \epsilon.$$

□

Övningar

Visa att följande är Cauchy-följder.

1. $a_n = 1/n^2$
2. $a_n = 1/\sqrt{n}$
3. Visa: a_n och b_n är Cauchy medför att $a_n + b_n$ är Cauchy.
4. Visa: f är Lipschitz på $[a, b]$ och $a_n \in [a, b]$ är Cauchy medför att $f(a_n)$ är Cauchy.

4.3 Bisektionsalgoritmen

Vi formulerar nu bisektionsalgoritmen i sin allmänna form, dvs för en allmän ekvation av formen $f(x) = 0$. Algoritmen är:

- (a) Givet: en funktion f som är kontinuerlig på $[a, b]$ och med $f(a)f(b) < 0$ (olika tecken).
- (b) Sätt $x_0 = a$, $X_0 = b$, $i = 0$.
- (c) Bilda mittpunkten $\hat{x}_i = (x_i + X_i)/2$.
 Om $f(\hat{x}_i) = 0$, sätt $x_{i+1} = X_{i+1} = \hat{x}_i$ och stoppa.
 Om $f(\hat{x}_i)f(x_i) < 0$, sätt $x_{i+1} = x_i$, $X_{i+1} = \hat{x}_i$.
 Om $f(\hat{x}_i)f(X_i) < 0$, sätt $x_{i+1} = \hat{x}_i$, $X_{i+1} = X_i$.
 Sätt $i = i + 1$ och upprepa (c).

Algoritmen genererar två följder $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ och $\{X_i\}_{i=0}^\infty$. (Om algoritmen stoppar i steg nummer i tänker vi oss att vi fortsätter följderna som konstanta följder: $x_j = X_j = \hat{x}_i$, $j \geq i + 1$.)

I praktiken räcker det att spara en av följderna. Och i praktiken avbryter vi algoritmen när tillräcklig noggrannhet uppnåtts: $|x_i - X_i| \leq \text{TOL}$, där TOL är en given feltolerans.

Med hjälp av denna algoritm kan vi bevisa Bolzanos sats och Satsen om mellanliggande värden.

4.4 Bolzanos sats

Sats 1. (Bolzanos sats) Antag att $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och att $f(a)f(b) < 0$ (dvs $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken). Då existerar ett reellt tal $\bar{x} \in [a, b]$ sådant att $f(\bar{x}) = 0$. Om f är strängt monotont (växande eller avtagande), så är lösningen $\bar{x}$ entydig (det enda nollstället till f).

Beviset är ett konstruktivt bevis, till skillnad från, till exempel, ett motsägelsebevis. Det innebär att beviset beskriver hur talet $\bar{x}$ konstrueras. Beviset är organiserat i följande fyra steg:

1. en algoritm som genererar en approximerande följd $\{x_i\}$;
2. ett bevis av att $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd så att vi erhåller ett reellt tal (decimalutveckling)

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i;$$
3. ett bevis av att $\bar{x}$ löser ekvationen: $\{f(x_i)\}$ är också en Cauchy-följd och $f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$;
4. ett bevis av att lösningen $\bar{x}$ är entydig (i fallet då f är en strängt monotont funktion).

Lägg dessa steg på minnet, vi kommer att använda samma slags bevis vid flera tillfällen. De första tre stegen ger *existens* av en lösning. Det sista steget ger *entydighet* av lösningen till ekvationen $f(x) = 0$. En viktig konsekvens av entydigheten är att alla approximerande följder konvergerar mot samma lösning $\bar{x}$. Dvs, lösningen beror inte på valet av algoritm eller approximerande följd (den är oberoende av konstruktionen).

Bevis. Vi genomför beviset under det extra antagandet att f är Lipschitz-kontinuerlig.

Steg 1. Vi använder bisektionsalgoritmen med startvärden a och b .

Steg 2. Vi erhåller två följder $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ och $\{X_i\}_{i=0}^\infty$ med

$$(4.6) \quad |x_i - X_i| \leq (b - a)2^{-i},$$

$$(4.7) \quad |x_i - x_j| \leq (b - a)2^{-i}, \quad j \geq i,$$

$$(4.8) \quad |X_i - X_j| \leq (b - a)2^{-i}, \quad j \geq i.$$

(Likhet gäller i (4.6) om algoritmen inte stoppar.) Olikheterna (4.7) och (4.8) visar att x_i och X_i är Cauchy-följder: $|x_i - x_j| \rightarrow 0$, $|X_i - X_j| \rightarrow 0$ då $i, j \rightarrow \infty$, och vi erhåller därmed decimalutvecklingar (reella tal)

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i, \quad \bar{X} = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i.$$

Olikheten (4.6) innebär att decimalutvecklingarna är lika:

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \bar{X}.$$

Steg 3. Lipschitz-kontinuiteten hos f ger

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq L|x_i - x_j| \leq L(b - a)2^{-i}, \quad j \geq i,$$

vilket innebär att $f(x_i)$ är en Cauchy-följd, $|f(x_i) - f(x_j)| \rightarrow 0$ då $i, j \rightarrow \infty$. Den ger en decimalutveckling (reellt tal) som vi betecknar $f(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i).$$

Vi måste visa att detta gränsvärde är lika med 0. För att göra detta noterar vi att avståndet mellan $f(x_i)$ och 0 är mindre än eller lika med avståndet mellan $f(x_i)$ och $f(X_i)$. Detta gäller eftersom $f(x_i)$ och $f(X_i)$ har olika tecken. Som exempel, om $f(x_i) < 0$ och $f(X_i) > 0$:

$$|f(x_i) - 0| = -f(x_i) < -f(x_i) + f(X_i) = |f(x_i) - f(X_i)|.$$

I bägge fallen fås:

$$|f(x_i) - 0| \leq |f(x_i) - f(X_i)| \leq L|x_i - X_i| \leq L(b - a)2^{-i} \rightarrow 0,$$

där vi också utnyttjat Lipschitz-villkoret och (4.6). Detta innebär att

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0,$$

eller med andra ord $f(\bar{x}) = 0$.

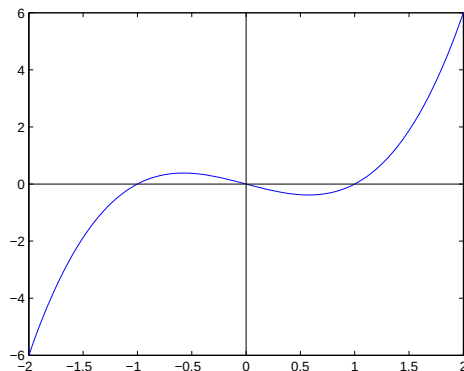
Steg 4. Antag nu att f är strängt växande. (Fallet med en strängt avtagande funktion kan behandlas på liknande sätt.) Detta betyder att $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$. Antag också att vi har två olika lösningar, dvs, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ med $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = 0$. Men detta motsäger antagandet om sträng monotonicitet. Alltså finns det bara en lösning. $\square$

Vi betraktar nu ekvationer på formen $f(x) = y$.

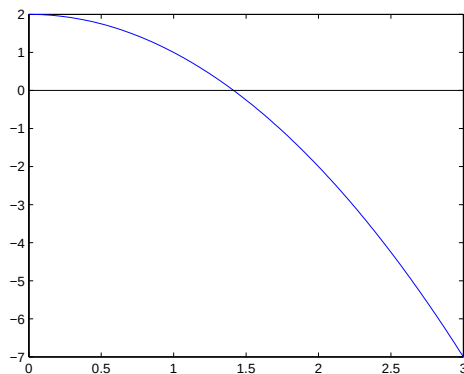
Sats 2. (*Satsen om mellanliggande värden*) (Adams 1.4, Theorem 9) Om $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och det reella talet y ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$, så existerar det ett reellt tal $\bar{x} \in [a, b]$ sådant att $f(\bar{x}) = y$. Om f är strängt monotont, så är $\bar{x}$ entydig.

Satsen säger att en kontinuerlig funktion antar alla värden mellan sina ändpunktsvärden. En diskontinuerlig funktion, å andra sidan, kan "hoppa över" värden. Se Figur 4.5.

Bevis. Om $f(a) = f(b)$ så är $y = f(a) = f(b)$ och vi kan välja $\bar{x} = a$ eller $\bar{x} = b$. Annars använder vi Bolzanos sats på funktionen $F(x) = f(x) - y$. Det är klart att $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ är Lipschitz med samma Lipschitz-konstant som f , och $F(a)F(b) < 0$ eftersom y ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$. Vidare, så är F strängt monotont om f är strängt monotont. Slutsatsen följer nu ur Bolzanos sats: det existerar ett tal $\bar{x}$ sådant att $F(\bar{x}) = f(\bar{x}) - y = 0$, och $\bar{x}$ är entydig om f är strängt monotont. $\square$



Figur 4.2: Icke-monoton funktion med tre nollställen.



Figur 4.3: Monoton funktion med entydigt nollställe.

4.5 Invers funktion

Antag nu att funktionen i Satsen om mellanliggande värden är strängt växande. (Avtagande funktioner kan behandlas på samma sätt.) Låt oss skriva $A = f(a)$, $B = f(b)$. Vi noterar följande konsekvenser av satsen.

Funktionen antar alla värden y i intervallet $[A, B]$ och den antar inga värden utanför $[A, B]$. Detta innebär att funktionens värdemängd är precis $R(f) = [A, B]$.

Ekvationen $f(x) = y$ har en entydig lösning x för alla $y \in [A, B]$. Eftersom lösningen x är entydig, definierar detta en funktion $y \mapsto x$. Mer precist, vi kan definiera en funktion

$$g : [A, B] \rightarrow \mathbf{R}$$

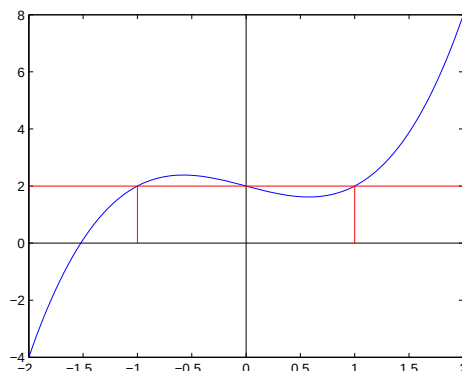
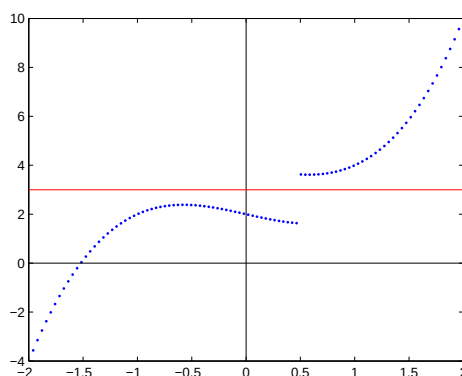
$$x = g(y), \quad \text{där } x \text{ är den unika lösningen till } f(x) = y.$$

(Kom ihåg att en funktion måste ha ett *unikt* värde *för varje* element i sin definitionsmängd.) Vi säger då att f är inverterbar och funktionen g kallas den inversa funktionen (eller bara inversen) till f . Den betecknas $g = f^{-1}$,

$$f^{-1} : [A, B] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x = f^{-1}(y), \quad \text{där } x \text{ är den unika lösningen till } f(x) = y.$$

Naturligtvis kan vi låta x och y byta plats och skriva $y = f^{-1}(x)$, $x \in [A, B]$.

Figur 4.4: Ekvation $f(x) = y$ med flera lösningar.Figur 4.5: En diskontinuerlig funktion som "hoppas över" värdet $y = 3$.

Notera att

$$\begin{aligned} D(f^{-1}) &= R(f) = [A, B], & R(f^{-1}) &= D(f) = [a, b], \\ f(f^{-1}(y)) &= y, \quad \forall y \in [A, B]; & f^{-1}(f(x)) &= x, \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

De två sista identiteterna, vilka visar att sammansättningen av en funktion och dess invers är en identitetsavbildning, bevisas så här:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(f^{-1}(y)), \quad \forall y \in [A, B], \\ x &= f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)), \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

En strängt avtagande funktion kan behandlas på samma sätt om vi noterar att $R(f) = [B, A]$. Vi har nu bevisat följande.

Sats. Om funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och strängt monoton, så har den en invers funktion f^{-1} .

Varning: f^{-1} uttalas "f invers", och det är inte samma sak som "f upphöjt till minus ett" $(f)^{-1} = 1/f$. Det är förvirrande att "invers" och "upphöjt till -1 " skrivs på samma sätt, men det är en tradition inom matematiken, som vi får leva med och vara försiktiga.

Exempel. Funktionen $f(x) = x^2$, är inte inverterbar eftersom ekvationen $x^2 = y$ har två lösningar $x = \pm\sqrt{y}$ då $y > 0$. I nästa avsnitt skall vi se att f blir inverterbar om vi betraktar en restriktion av definitionsmängden till de icke-negativa talen.

4.6 Kvadratrotsfunktionen

Vi introducerar kvadratrotsfunktionen och undersöker dess egenskaper.

Funktionen $f : [0, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, är strängt växande eftersom $0 \leq x < y$ medför $x - y < 0$ och $x + y > 0$ så att $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) < 0$. Därmed har ekvationen $x^2 = y$ en unik lösning $x = \sqrt{y}$ för alla $y \in [0, b^2]$. Alltså är f inverterbar med $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Detta kan göras för alla värden på b , entydigheten medför att bisektionsalgoritmen ger samma resultat oavsett vilka startvärden $a = 0$ och $b > 0$ vi använder. Så funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, är inverterbar med invers $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Notera: definitionsmängden till kvadratrotsfunktionen $D(\sqrt{\cdot}) = [0, \infty)$ och värdemängden $R(\sqrt{\cdot}) = [0, \infty)$.

Varning: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ är inte samma sak som $(f)^{-1}(x) = (f(x))^{-1} = x^{-2} = 1/x^2$ även om de skrivs på nästan samma sätt.

Eftersom $x^2 = a$ och $y^2 = b$ medför $(xy)^2 = ab$ och $(x/y)^2 = a/b$, drar vi slutsatsen att

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Vi undersöker nu Lipschitz-kontinuiteten hos $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= \left\{ \text{multiplicera med "konjugatuttrycket" } \sqrt{x} + \sqrt{y} \right\} \\ &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \quad \left\{ \text{med konjugatregeln} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} |x - y| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta}} |x - y| = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} |x - y| \quad \text{för } x, y \geq \delta. \end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att kvadratrotsfunktionen är Lipschitz-kontinuerlig med Lipschitz-konstant $L = 1/(2\sqrt{\delta})$ på alla intervall på formen $[\delta, \infty)$ med $\delta > 0$. Dvs, på alla intervall som undviker en omgivning av 0. Men den är inte Lipschitz på hela sin definitionsmängd $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$. Detta är uppenbart från den tidigare beräkningen, men kan också inses genom att betrakta grafen där lutningen är oändlig i 0.