MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 20XX–08–XX kl. 08.30 – 09.30

Inledande matematik M/TD, Dugga 1

Test-dugga 1

NAMN: Niklas Ericsson

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **M** **TD**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Förenkla, (1 p)

$$\frac{2}{x-\frac{1}{x}}-\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

$$\frac{2}{x-\frac{1}{x}} - \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{2x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$$

2. Bestäm kvot och rest för polynomdivisionen, (1 p)

$$\frac{x^4+2x^3+25}{x^2+4x+5}.$$

$$x^2 - 2x + 3$$

$$x^4 + 2x^3 + 25 \mid x^2 + 4x + 5$$

$$-\,(x^4 + 4x^3 + 5x^2)$$

$$-2x^3 - 5x^2 + 25$$

$$-\,(-2x^3 - 8x^2 - 10x)$$

$$3x^2 + 10x + 25$$

$$-(3x^2 + 12x + 15)$$

$$-2x + 10$$

Kvot : $x^2 - 2x + 3$

Rest : $-2x + 10$

3. Visa att, (2 p)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

$$V.L. = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

additions-
formlerna

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

dividera
täljare och
nämnare med
cos x cos y

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = H.L.$$

4. Lös ekvationen $z^3 = 1 + i$ och rita ut rötterna i det komplexa talplanet. (2 p)

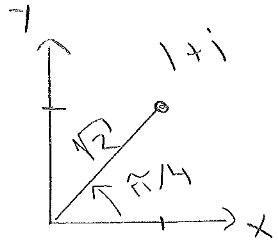
Sätt $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

de Moivres formel ger:

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

För V.L. har vi alltså:

$$\begin{cases} |z^3| = r^3 \\ \arg(z^3) = 3\theta \end{cases}$$



Skriv om H.L. på polär form:

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

För H.L. har vi alltså:

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

V.L. = H.L. ger:

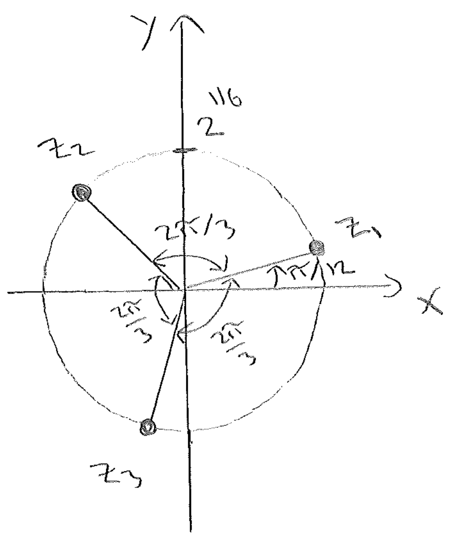
$$\begin{cases} r^3 = \sqrt{2} = 2^{1/2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2^{1/6} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$z_1 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$z_2 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$

$z_3 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$



MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 20XX–08–XX kl. 08.30 – 09.30

Inledande matematik M/TD, Dugga 1

Test-dugga 2

NAMN: Niklas Ericsson

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **M** **TD**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Lös olikheten (svara med intervall), (1 p)

$$\frac{2x^2}{x+2} < x - 2.$$

$$\frac{2x^2}{x+2} - (x-2) < 0$$

$$\frac{2x^2}{x+2} - \frac{x^2-4}{x+2} < 0$$

$$\frac{x^2+4}{x+2} < 0$$

x		-2	
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+4}{x+2}$	$-$	odef.	$+$

$$(-\infty, -2)$$

2. Bestäm rötterna och faktorisera polynomet, (1 p)

$$2x^3 - 4x^2 - 16x.$$

$$2x^3 - 4x^2 - 16x = 2x(x^2 - 2x - 8)$$

$$= 2x((x-1)^2 - 3^2)$$

$$= 2x(x-1+3)(x-1-3)$$

$$= 2x(x+2)(x-4)$$

Rötter: $x_1 = -2$

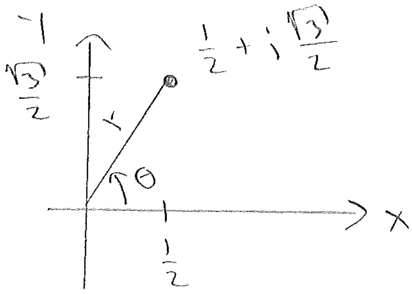
$x_2 = 0$

$x_3 = 4$

3. Beräkna, (2 p)

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}.$$

Svara på formen $a+ib$.



$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}$$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}$$

de Moivres formel

$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

$r=1$

$\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

$$=\cos\left(\frac{100\pi}{3}-16\cdot 2\pi\right)+i\sin\left(\frac{100\pi}{3}-16\cdot 2\pi\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

4. Formulera och bevisa faktorsatsen. (2 p)

Se Adams/Essex el. FL-ant.