Introduktionskurs i matematik M/TD

Niklas Ericsson

2012-08-22

Idag:

Adams/Essex. *Calculus: A Complete Course.*

P.1 *Real Numbers and the Real Line*

- Talsystem
- Egenskaper hos de reella talen
- Intervall
- Att lösa olikheter
- Absolutbelopp
- Ekvationer och olikheter med absolutbelopp

Talsystem

- Naturliga tal

  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

- Heltal

  $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

- Rationella tal

  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \; m, n \in \mathbb{Z}, \;\; n \neq 0 \right\}$ (symbolen $\in$ betyder "tillhör")

  t.ex.: $\frac{3}{4}, \; -\frac{5}{6}, \; 7 \; (= \frac{7}{1}), \; 0 \; (= \frac{0}{3}), \; -4 \; (= \frac{-4}{1})$

Notera: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (symbolen $\subset$ betyder "är en delmängd av")

De rationella talen kan i sin tur utvidgas: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- <u>Reella tal</u>

  Varje reellt tal motsvarar en punkt på *tallinjen*.

$\mathbb{R}$:

Reella tal kan skrivas på *decimalform*:

♣ $9 = 9.00000...$

♣ $-\dfrac{1}{4} = -0.250000...$

♣ $\dfrac{4}{3} = 1.33333... = 1.\overline{3}$

♣ $\dfrac{3}{11} = 0.272727... = 0.\overline{27}$

♣ $\sqrt{2} = 1.4142135623...$

♣ $\pi = 3.1415926535...$

Irrationella tal är reella tal som *inte* är rationella, d.v.s. som inte kan skrivas som en kvot mellan två heltal.

Exempel.

♣ $\sqrt{2} = 1.4142135623...$

♣ $\pi = 3.1415926535...$

♣ $e = 2.7182818284...$

Rationella tal har *periodisk* decimalutveckling.

Irrationella tal har *icke-periodisk* decimalutveckling.

Exempel. Omvandla $0.\overline{27} = 0.272727...$ till bråkform.

$$\begin{aligned} x &= 0.272727... \\ 100x &= 27.272727... \\ 99x &= 27 \\ x &= \frac{27}{99} = \frac{9 \cdot 3}{9 \cdot 11} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

Bevis för att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Vi genomför ett s.k. *motsägelsebevis*.

Vi *antar motsatsen*, d.v.s. att $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, där m och $n \neq 0$ är heltal.

Vi antar även att vi förkortat bort gemensamma faktorer.

Kvadrera bägge led: $\quad 2 = \dfrac{m^2}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = 2n^2$

Men då är m^2 ett jämnt tal, och därmed är även m ett jämnt tal:

$m = 2k$, där k är ett heltal.

Vi får därmed: $\quad 4k^2 = 2n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 2k^2$

Men då är n^2 ett jämnt tal, och därmed är även n ett jämnt tal.

Men då har m och n den gemensamma faktorn 2, vilket motsäger vårt antagande.

Antagandet att $\sqrt{2}$ är rationellt måste därmed vara felaktigt. $\square$

Egenskaper hos de reella talen

De reella talens egenskaper kan delas in i tre kategorier.

1. Algebraiska egenskaper
2. Ordning
3. Fullständighet

De *algebraiska egenskaperna* inkluderar:

$a + b$	$=$	$b + a$	Kommutativa lagen för addition
ab	$=$	ba	Kommutativa lagen för multiplikation
$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$	Associativa lagen för addition
$(ab)c$	$=$	$a(bc)$	Associativa lagen för multiplikation
$a(b + c)$	$=$	$ab + ac$	Distributiva lagen

Ur ovanstående grundläggande lagar följer:

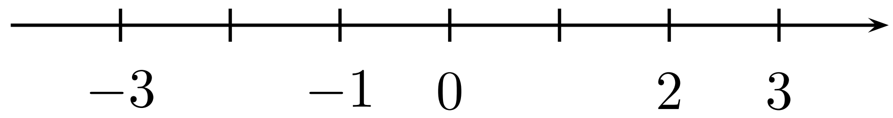
$$
\begin{aligned}
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{Första kvadreringsregeln} \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{Andra kvadreringsregeln} \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{Konjugatregeln}
\end{aligned}
$$

- De reella talen är *ordnade*.
- Detta uttrycks med symbolerna:

$<$	"mindre än"
$\leq$	"mindre än eller lika med"
$>$	"större än"
$\geq$	"större än eller lika med"

Exempel.

- ♣ $2 < 3$
- ♣ $2 > -1$
- ♣ $-3 < -1$
- ♣ $2 \leq 3$
- ♣ $2 \geq 2$



Vi får räkna med olikheter på följande sätt (analogt för $\leq$ och $\geq$):

1. *Addera* samma tal till bägge led.

   Exempel. ♣
   $$2 < 3$$
   Addera 4
   $$6 < 7$$

2. *Subtrahera* samma tal från bägge led.

   Exempel. ♣
   $$8 > 3$$
   Subtrahera 1
   $$7 > 2$$

3. *Multiplicera/dividera* bägge led med ett *positivt* tal.

Exempel. ♣ $$2 < 3$$

Multiplicera med 2

$$4 < 6$$

♣ $$2 < 3$$

Dividera med 2

$$1 < \frac{3}{2}$$

4. *Multiplicera/dividera* bägge led med ett *negativt* tal, om vi (OBS!) *vänder på olikheten.*

Exempel. ♣ $$2 < 3$$

Multiplicera med -2

$$-4 > -6$$

♣ $$2 < 3$$

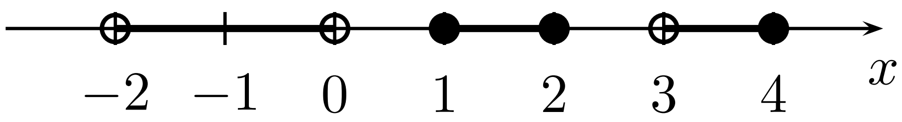
Dividera med -2

$$-1 > -\frac{3}{2}$$

De reella talens *fullständighet* innebär geometriskt att tallinjen "saknar hål". Varje punkt på tallinjen motsvarar ett reellt tal. Vi återkommer längre fram i kursen till denna egenskap.

Intervall

Intervall kan beskrivas med hjälp av olikheter.



$$
\begin{array}{rcl}
(-2,0): & -2 < x < 0 & \text{öppet intervall} \\
[1,2]: & 1 \leq x \leq 2 & \text{slutet intervall} \\
(3,4]: & 3 < x \leq 4 & \text{halvöppet intervall}
\end{array}
$$

Intervall kan också vara oändliga:

$$\begin{aligned} (3,\infty) : &\qquad x > 3 \\ (-\infty, 2] : &\qquad x \leq 2 \\ \mathbb{R} = (-\infty, \infty) : &\qquad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Att lösa olikheter

- Räknereglerna kan användas för att *lösa* olikheter.

Exempel. Lös olikheten $7 - 2x \leq x + 4$.

Subtrahera x från bägge led: $7 - 3x \leq 4$

Subtrahera 7 från bägge led: $-3x \leq -3$

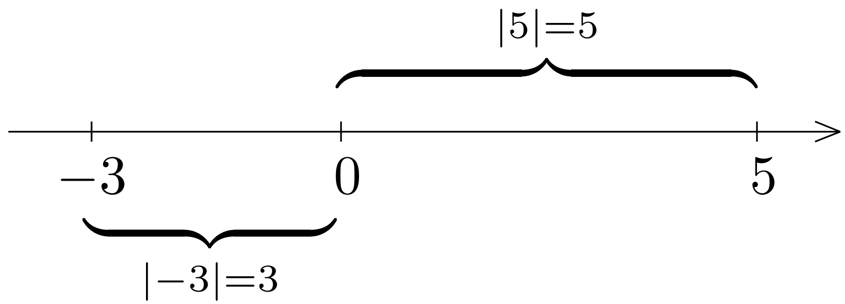
Dividera bägge led med -3: $x \geq 1$

svar: Lösningsmängden är intervallet $[1, \infty)$

Absolutbelopp

- Avståndet på tallinjen från ett tal x till 0 betecknas $|x|$ och kallas *absolutbeloppet* av x.

Exempel.



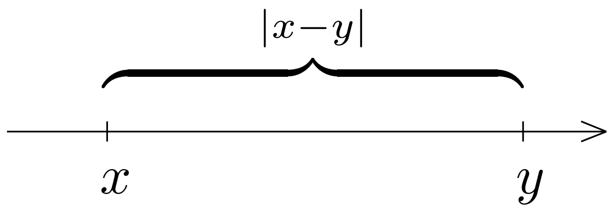
- Algebraisk definition:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exempel. ♣ $|5| = 5$ eftersom $5 > 0$

♣ $|-3| = -(-3) = 3$ eftersom $-3 < 0$

- Mer generellt så är $|x - y|$ avståndet mellan x och y.



Egenskaper hos absolutbelopp.

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a|\,|b| \quad \text{och} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad$ (triangelolikheten)

Bevis av 3.

Eftersom $|a|^2 = a^2$ och $\pm a \leq |a|$ fås:

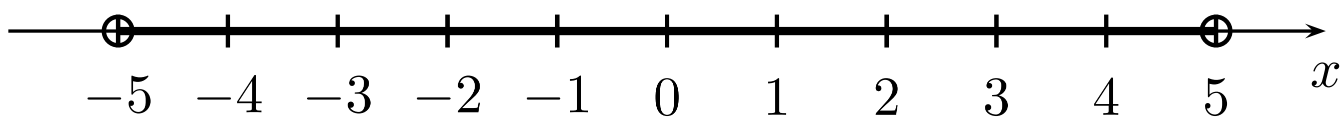
$$\begin{aligned} |a \pm b|^2 &= (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Dra roten ur bägge led. $\square$

Ekvationer och olikheter med absolutbelopp

Exempel. Lös olikheten $|x| < 5$.

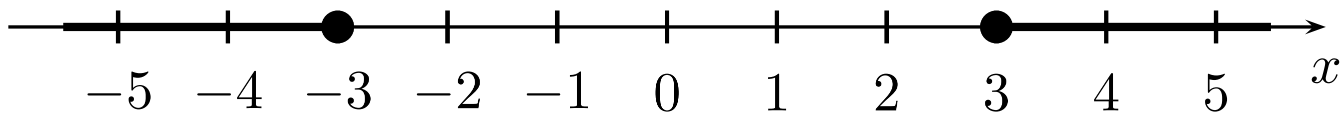
Kom ihåg: $|x|$ är avståndet mellan 0 och x på tallinjen.



$-5 < x < 5$

svar: Lösningsmängden är intervallet $(-5, 5)$

Exempel. Lös olikheten $|x| \geq 3$.



$x \leq -3$ eller $x \geq 3$

svar: Lösningsmängden är *unionen* av två intervall: $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

- Jämför med den *dubbla olikheten* $-5 < x < 5$ på förra sidan, som betyder $x > -5$ *och* $x < 5$.

Exempel. Lös olikheten $|2x-3| > 1$.

$$\begin{array}{rcr} 2x-3 < -1 & \text{eller} & 2x-3 > 1 \\ 2x < 2 & \text{eller} & 2x > 4 \\ x < 1 & \text{eller} & x > 2 \end{array}$$

svar: $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Alternativ lösning:

$$|2x-3| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2|x-1.5| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1.5| > 0.5$$

Avståndet från x till 1.5 skall alltså vara större än 0.5:

$$x < 1.5 - 0.5 \qquad \text{eller} \qquad x > 1.5 + 0.5$$