

Introduktionskurs i matematik M/TD

Niklas Ericsson

2012-08-24

Idag:

Adams/Essex. *Calculus: A Complete Course*.

P.4 *Functions and Their Graphs*

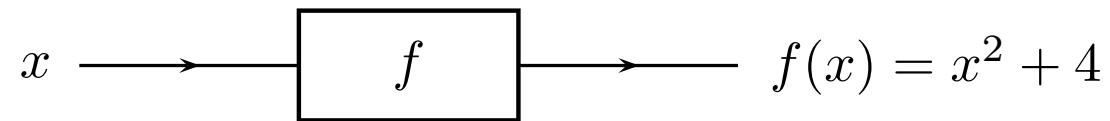
P.5 *Combining Functions to Make New Functions*

- Funktionsbegreppet
- Graf till funktion
- Symmetrier och spegling
- Addition, subtraktion, multiplikation och division av funktioner
- Sammansättning av funktioner
- Styckvis definierade funktioner

Funktionsbegreppet

- En funktion f är en *regel*, som på ett välbestämt och *entydigt* sätt gör om objekt (“input”) till nya objekt (“output”).
- För varje tillåtet “input” x skall genereras *precis ett* “output” (*funktionsvärde*) $f(x)$.
- Mängden av samtliga tillåtna “input”, kallas funktionens *definitionsområde* (eng.: *domain*) och betecknas $\mathcal{D}(f)$.
- Mängden av samtliga funktionsvärden, kallas funktionens *värdemängd* (eng.: *range*) och betecknas $\mathcal{V}(f)$ (eng.: $\mathcal{R}(f)$).
- Vi kommer oftast att betrakta funktioner, där både definitionsområdet och värdemängden är mängder av reella tal.

Exempel. Låt funktionen f vara regeln “kvadrera input och addera därefter 4”, definierad för alla reella tal: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$



$$f(0) = 0^2 + 4 = 4$$

$$f(-5) = (-5)^2 + 4 = 29$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 4 = x^2 + 2x + 5$$

$$f(3t) = (3t)^2 + 4 = 9t^2 + 4$$

$$f(f(0)) = f(4) = 4^2 + 4 = 20$$

Notera. $\mathcal{V}(f) = [4, \infty)$

- Om ingen definitions mängd är specificerad, tar vi största möjliga mängd sådan att funktionsvärdena är reella tal.

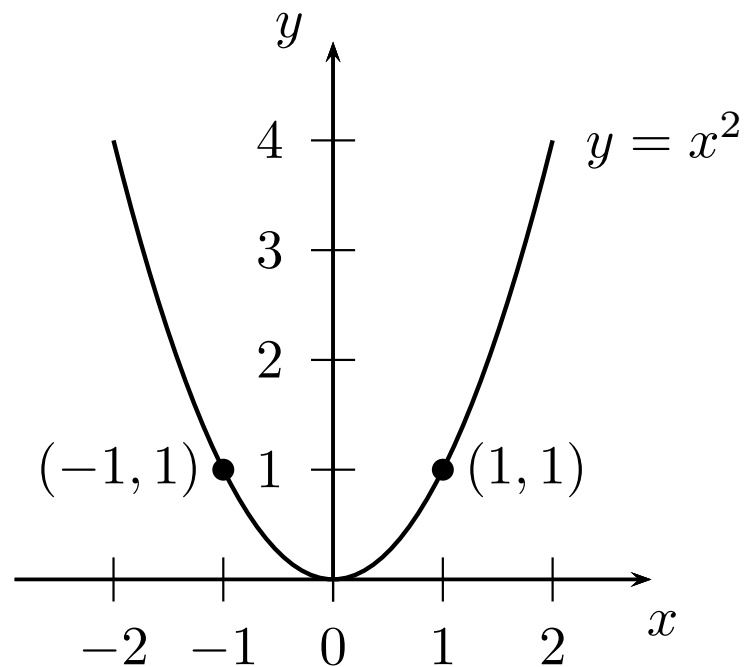
Exempel. Med $f(x) = \sqrt{x}$, så är $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ och $\mathcal{V}(f) = [0, \infty)$.

Exempel. Med $g(x) = \frac{1}{x-3}$, så är $\mathcal{D}(g) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ och $\mathcal{V}(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Graf till funktion

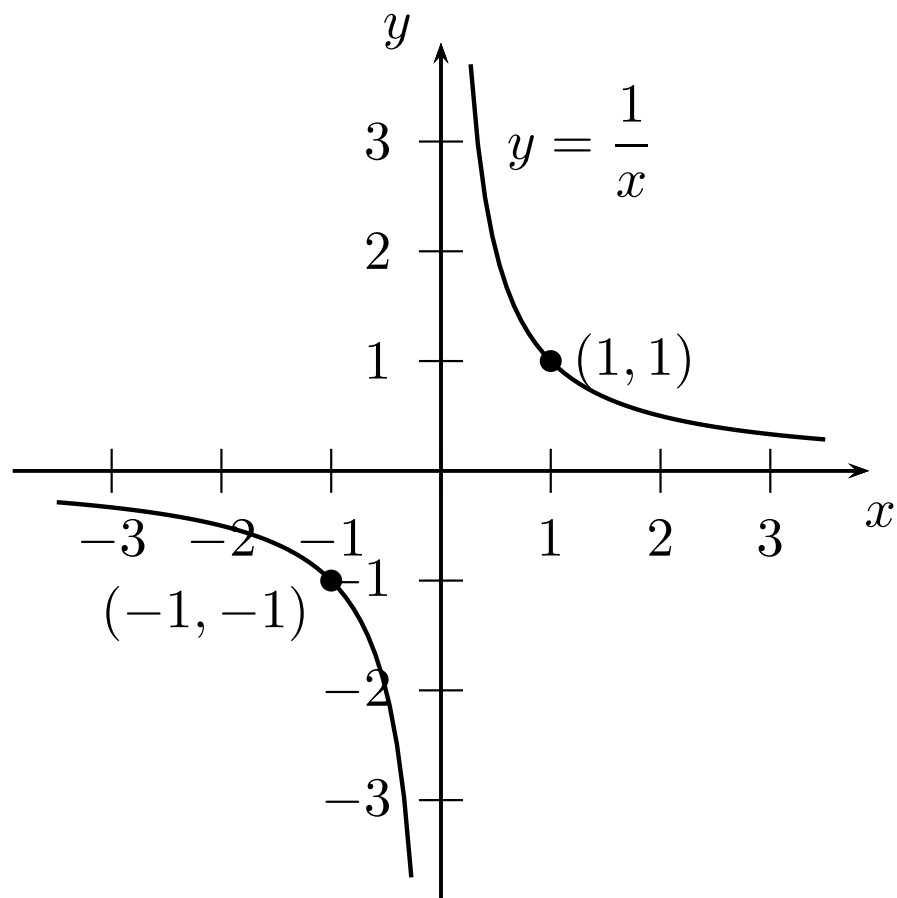
- Grafen till en funktion f , är samma sak som grafen till ekvationen $y = f(x)$.
- Grafen består av de punkter (x, y) , vars koordinater är par av input-outputvärden till f .
- Detta innebär att $x \in \mathcal{D}(f)$ och att $y = f(x)$.
- x kallas *oberoende variabel*, och y kallas *beroende variabel*.

Exempel. Grafen till $f(x) = x^2$.

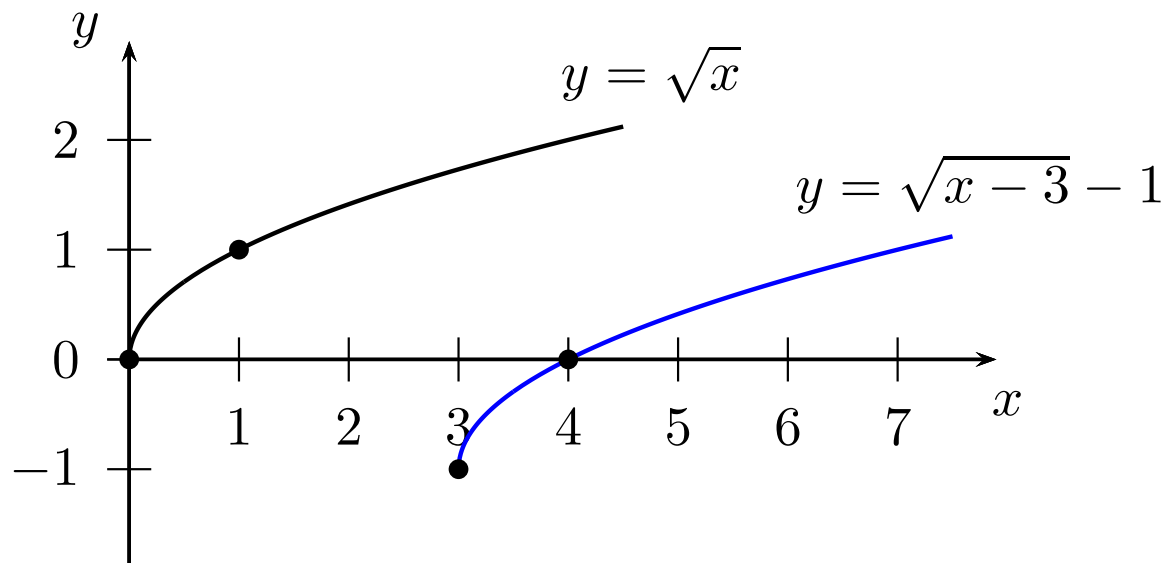


Kommentar. Vid grafitning för hand, gör en värdetabell.

Exempel. Grafen till $f(x) = \frac{1}{x}$.



Exempel. Graferna till $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = \sqrt{x-3} - 1$.

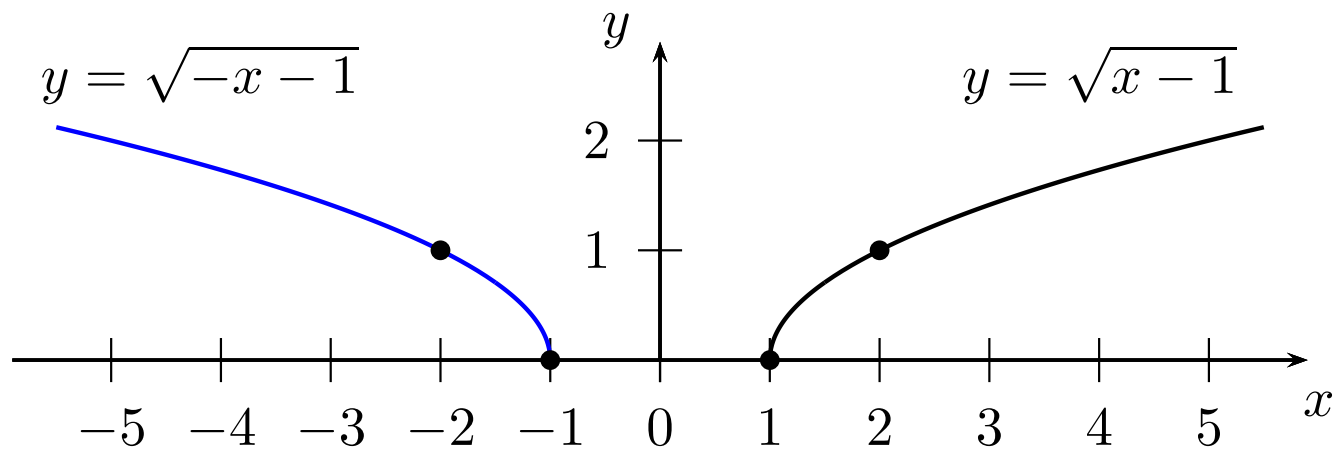


Notera. Grafen för g fås genom att flytta grafen för f , tre steg åt höger och ett steg nedåt. Detta görs genom att i ekvationen $y = \sqrt{x}$ byta x mot $x - 3$, och y mot $y + 1$.

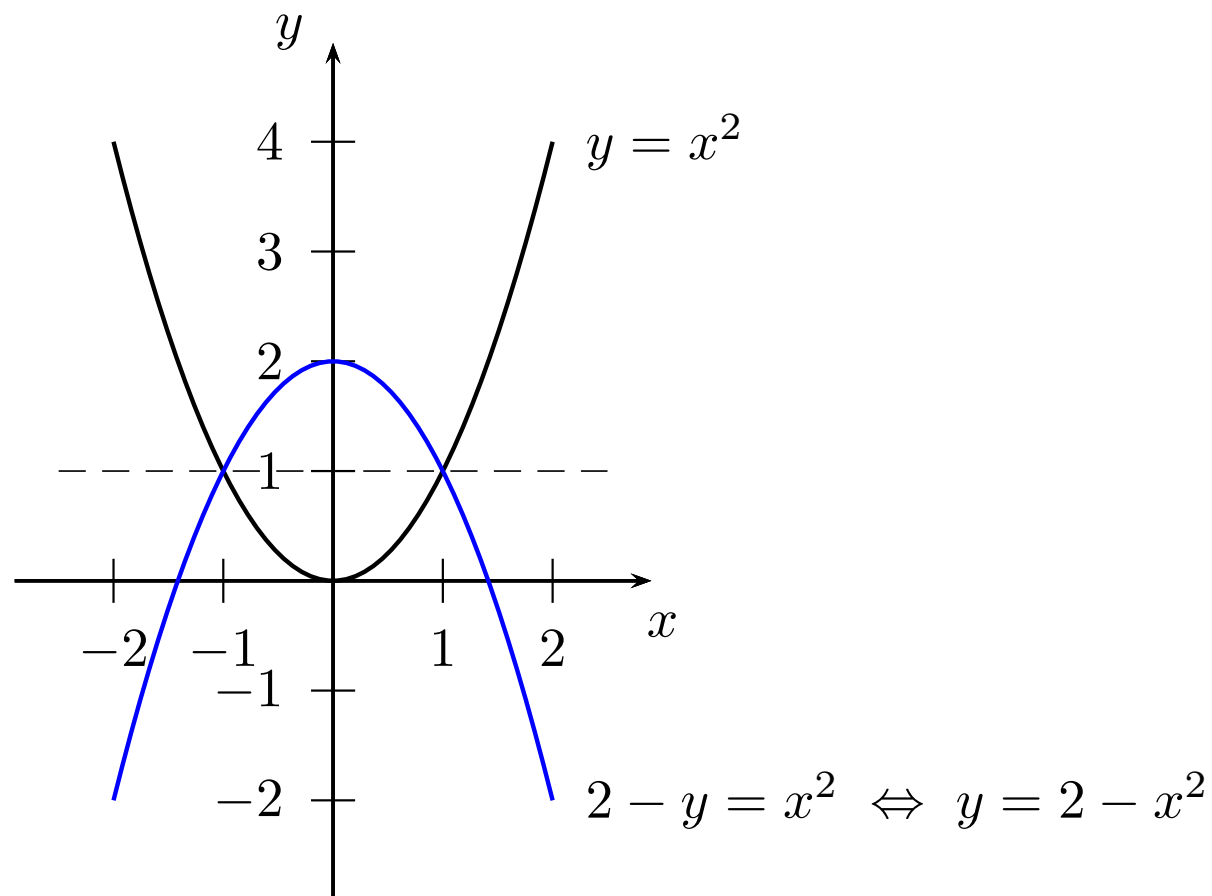
Symmetrier och spegling

- Spegling av en graf i en rät linje (i planet), kan (t.ex.) göras på följande sätt:
 1. Spegling i y -axeln: Byt x mot $-x$ i grafens ekvation.
 2. Spegling i x -axeln: Byt y mot $-y$ i grafens ekvation.
 3. Spegling i linjen $x = a/2$: Byt x mot $a - x$ i grafens ekvation.
 4. Spegling i linjen $y = b/2$: Byt y mot $b - y$ i grafens ekvation.
 5. Spegling i linjen $y = x$: Byt plats på x och y i grafens ekvation.

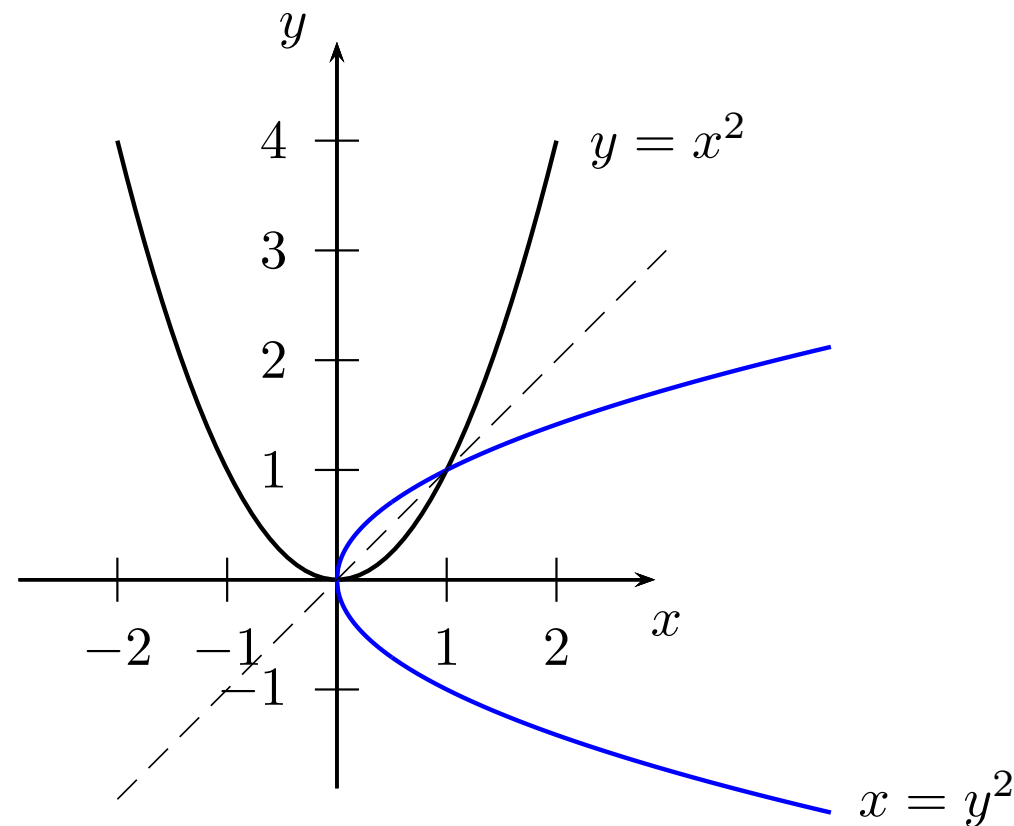
Exempel. (Spegling i y -axeln.) Graferna till $y = \sqrt{x-1}$ och $y = \sqrt{-x-1}$.



Exempel. (Spegling i linjen $y = 1$.) Graferna till $y = x^2$ och $2 - y = x^2 \Leftrightarrow y = 2 - x^2$.



Exempel. (Spegling i linjen $y = x$.) Graferna till $y = x^2$ och $x = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$.



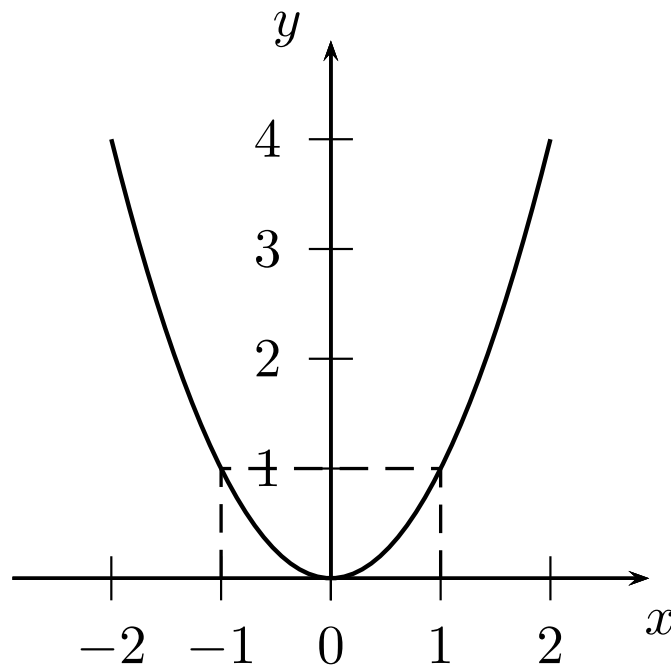
Notera. Grafen till ekvationen $x = y^2$ är ingen funktionsgraf. Det finns för $x > 0$ två olika y -värden.

- En funktion f kallas *jämn* om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathcal{D}(f)$.
- Grafen till en jämn funktion är därmed spegelsymmetrisk m.a.p. y -axeln.

Exempel. $f(x) = x^2$

Notera: $f(-x) = f(x)$ för alla x

$$(-x)^2 = x^2$$

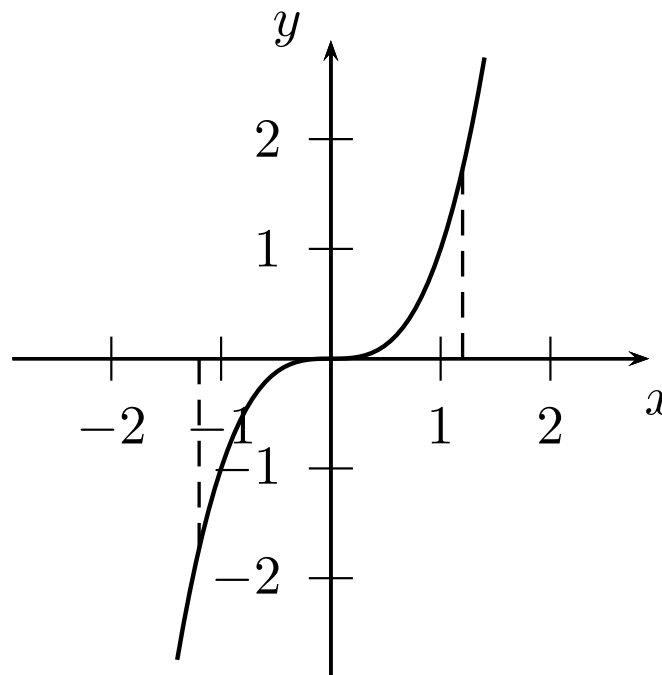


- En funktion f kallas *udda* om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathcal{D}(f)$.
- För en udda funktion gäller att om punkten (x, y) ligger på grafen, så ligger även punkten $(-x, -y)$ på denna.
- Grafen förblir oförändrad vid rotation 180° kring origo.
- Detta kallas symmetri m.a.p. origo.
- Grafen till en udda funktion går alltid genom origo (om funktionen är definierad i $x = 0$).

Exempel. $f(x) = x^3$

Notera: $f(-x) = -f(x)$ för alla x

$$(-x)^3 = -x^3$$



- *Notera.* De flesta funktioner är varken udda eller jämna.

Addition, subtraktion, multiplikation och division av funktioner

- Funktioner kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras.
- Om f och g är funktioner, definierar vi för alla $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ (där symbolen $\cap$ betyder *snittet* mellan definitionsmängderna, vilket innebär att x skall tillhöra både $\mathcal{D}(f)$ och $\mathcal{D}(g)$):

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{där } g(x) \neq 0.$$

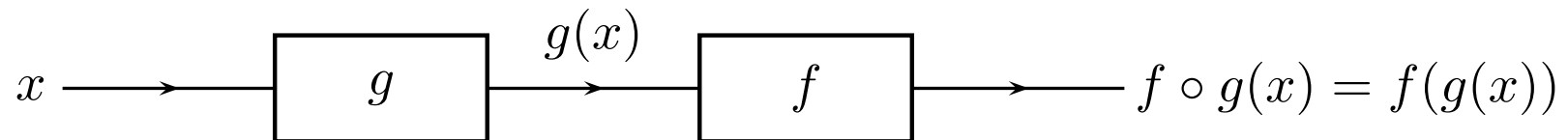
Exempel. Låt $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = \sqrt{2-x}$. Då är $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ och $\mathcal{D}(g) = (-\infty, 2]$.

För: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$, fås $\mathcal{D}(f+g) = [0, 2]$.

För: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$, fås $\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = [0, 2)$.

Sammanställning av funktioner

- En sammansatt funktion $f \circ g(x) = f(g(x))$ bildas genom att använda “output” från g som “input” till f .
- För att x skall tillhöra $\mathcal{D}(f \circ g)$ krävs två saker:
 1. $x \in \mathcal{D}(g)$
 2. $g(x) \in \mathcal{D}(f)$



g kallas *inre* funktion.

f kallas *yttre* funktion.

Exempel. Med $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = x - 1$ fås:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = \sqrt{x - 1}, \quad \text{där } \mathcal{D}(f \circ g) = [1, \infty).$$

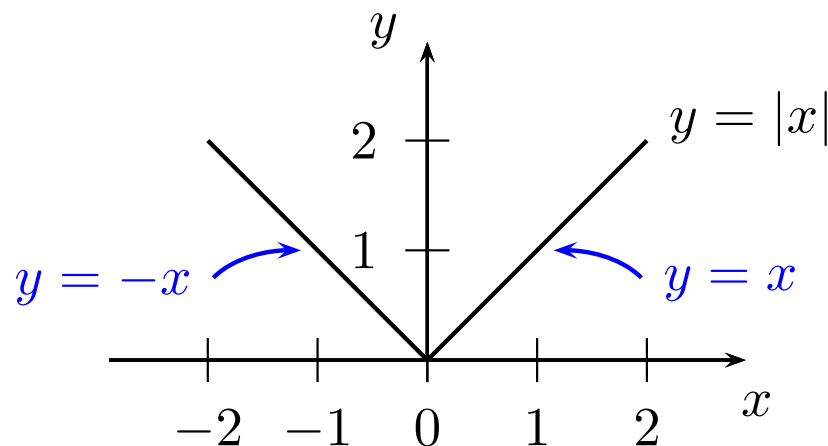
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1, \quad \text{där } \mathcal{D}(g \circ f) = [0, \infty).$$

Notera. $f \circ g \neq g \circ f$ (i allmänhet)

Styckvis definierade funktioner

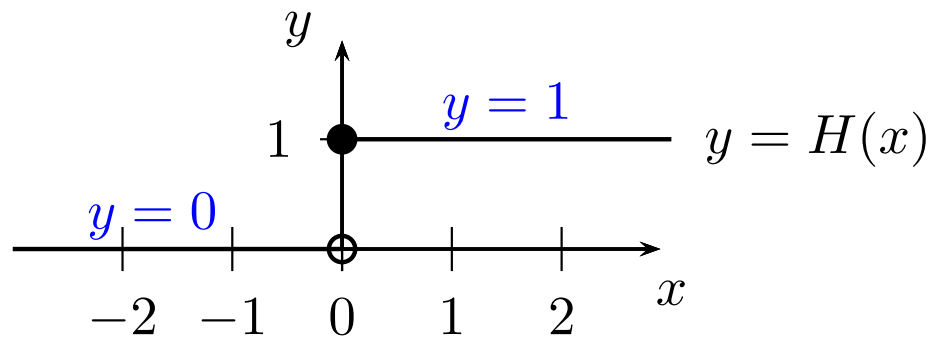
- En och samma funktion kan beskrivas med hjälp av olika formeluttryck i olika delar av sin definitionsmängd.

Exempel. Absolutbeloppsfunktionen: $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$



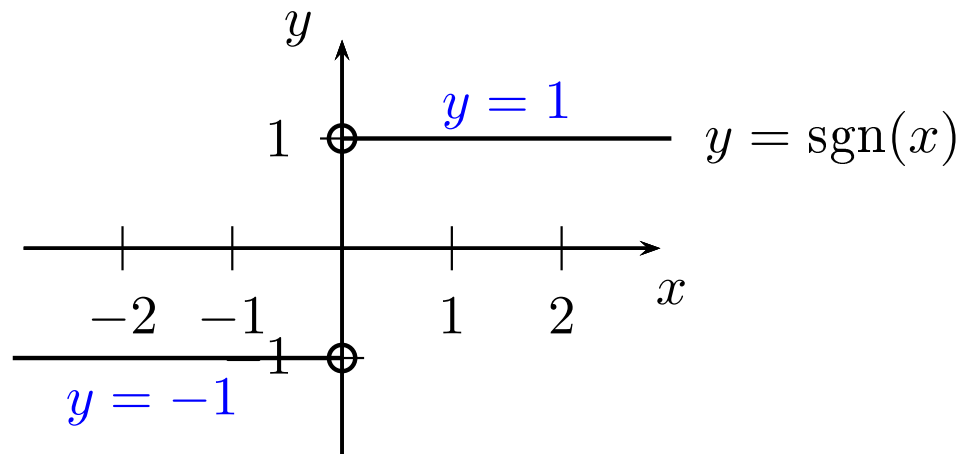
Exempel. Heavisides funktion (stegfunktioner)

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

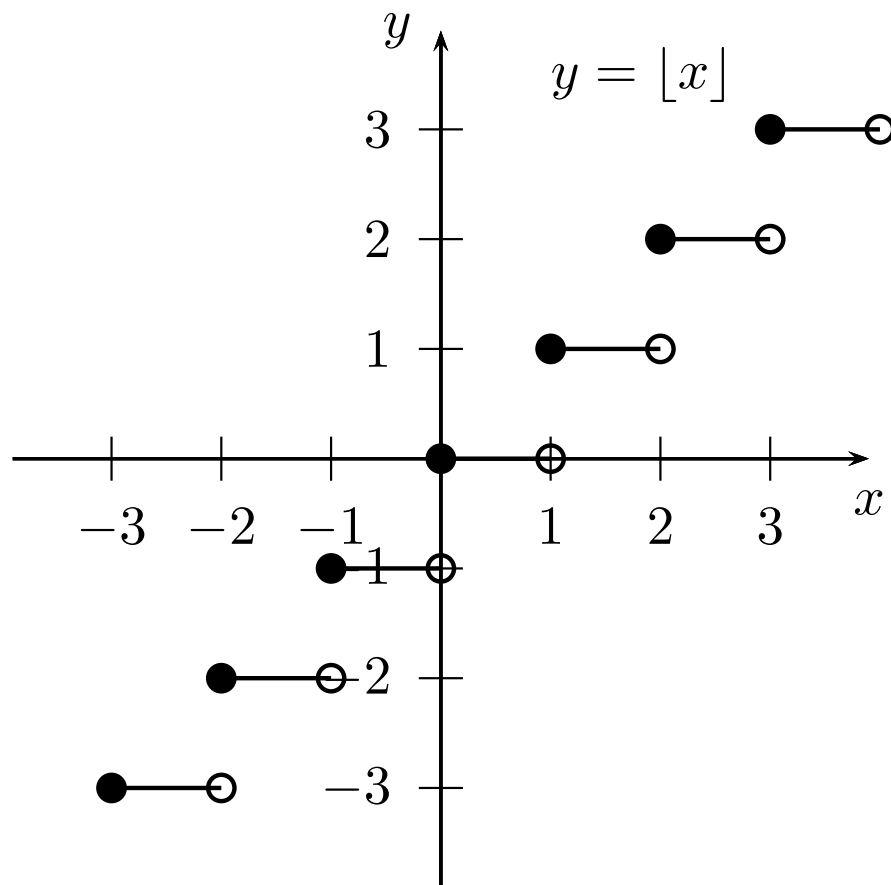


Exempel. Signumfunktionen (teckenfunktionen)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \text{odef.}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Exempel. Heltalsgolvfunktionen $\lfloor x \rfloor$, definieras som det största heltal som är mindre än eller lika med x .



Exempel.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

