

Introduktionskurs i matematik M/TD

Niklas Ericsson

2012-08-28

Idag:

Adams/Essex. *Calculus: A Complete Course*.

P.7 *The Trigonometric Functions*

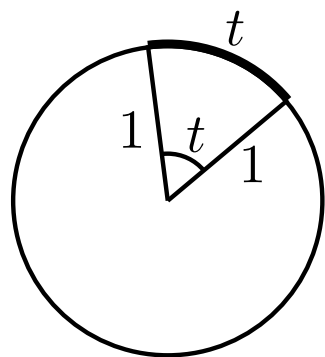
- Vinkelmåttet radianer
- Sinus, cosinus och tangens. Definitioner.
- Trigonometriska funktioner och deras grafer
- Trigonometriska identiteter
- Triangelsolvering. Sinus- och cosinussatserna.

Vinkelmåttet radianer

- Vi kan mäta vinklar i *grader* och *radianer*.

$$1 \text{ varv} = 360^\circ = 2\pi \text{ radianer}$$

- I en cirkel med radie 1 kommer en vinkel t radianer, med spets i cirkelns medelpunkt, att skära ut en cirkelbåge med längd t .



$$\text{Omkrets} = 2\pi$$

Vinkel	Båglängd
1 radian	1
2 radianer	2
t radianer	t
2π radianer	2π

- För att omvandla mellan grader och radianer kan vi utnyttja:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianer}$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ radianer} = \frac{\pi}{180} \text{ radianer}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\approx 57.3^\circ)$$

Exempel. Omvandla från grader till radianer.

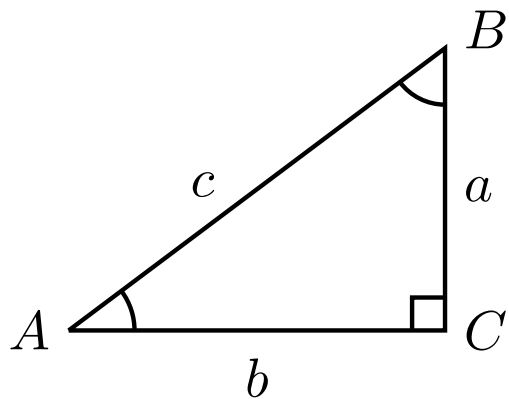
$$60^\circ = 60 \cdot 1^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radianer} = \frac{\pi}{3} \text{ radianer}$$

Exempel. Omvandla från radianer till grader.

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radianer} = \frac{7\pi}{6} \cdot 1 \text{ radian} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

Definition av sinus, cosinus och tangens. Spetsiga vinklar

- Betrakta en rätvinklig triangel:



Vi definierar:

$$\sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

- Analogt:

$$\sin B = b/c, \quad \cos B = a/c, \quad \tan B = b/a = \sin B / \cos B$$

- A och B är *komplementvinklar*, det vill säga deras summa är 90° :

$$A + B = 180^\circ - C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad B = 90^\circ - A$$

- Alltså:

$$\sin(\overbrace{90^\circ - A}^B) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}$$

- Lite etymologi:

cosinus = sinus för **komplementvinkeln**

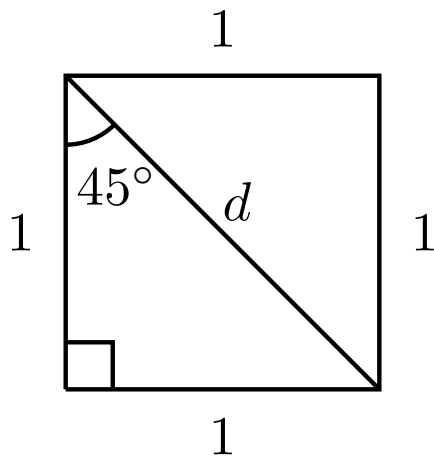
cotangens = tangens för **komplementvinkeln**

- Sekant och cosekant:

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A}$$

Exempel. Halv kvadrat. $(45^\circ = \frac{\pi}{4})$



Pythagoras sats:

$$1^2 + 1^2 = d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{2}$$

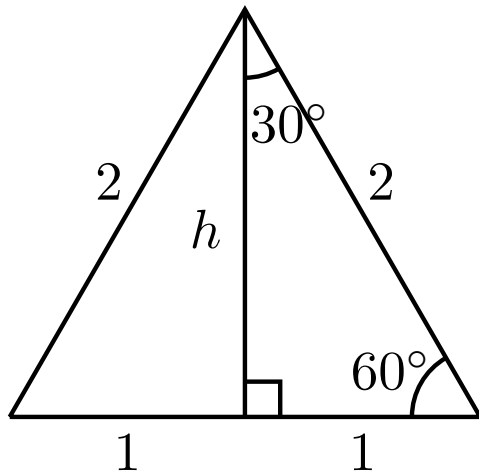
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

Exempel. Halv liksidig triangel. $(60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6})$

Pythagoras sats:

$$1^2 + h^2 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{3}$$



$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

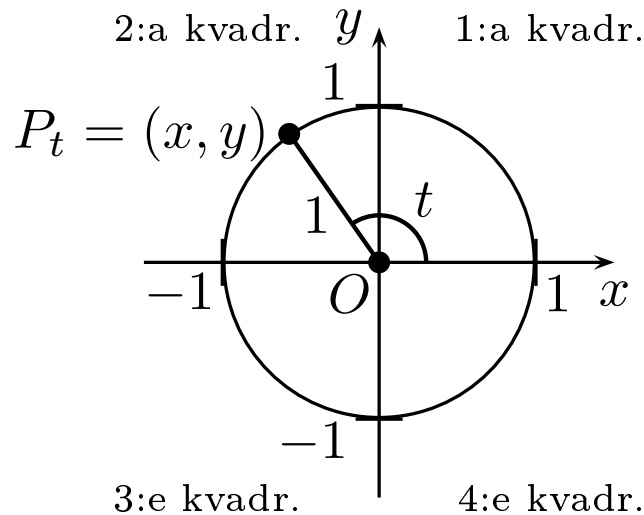
$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Godtyckliga vinklar

- Betrakta *enhetscirkeln* med radie 1 och medelpunkt i origo:



Låt $P_t = (x, y)$ vara en punkt på cirkeln, och låt t vara vinkeln mellan positiva x -axeln och OP .

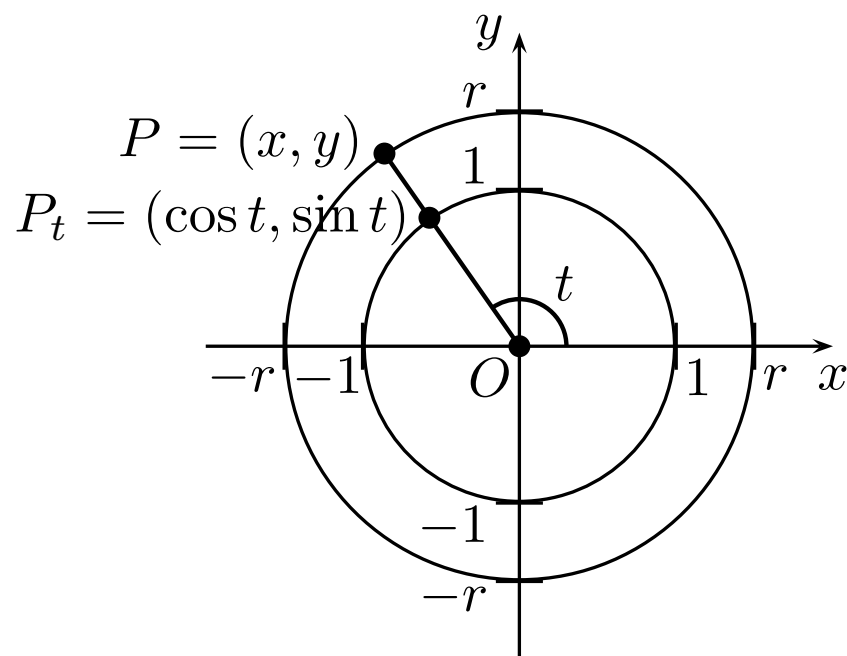
- Vi definierar:
$$\cos t = x$$
$$\sin t = y$$
$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Notera: $-1 \leq \cos t \leq 1$
 $-1 \leq \sin t \leq 1$

Teckentabell.

t	0°	1:a kv.	90°	2:a kv.	180°	3:e kv.	270°	4:e kv.	360°
	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin t$	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
$\cos t$	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
$\tan t$	0	+	odef.	−	0	+	odef.	−	0

- För en punkt $P = (x, y)$ på en cirkel med radie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ fås:



$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

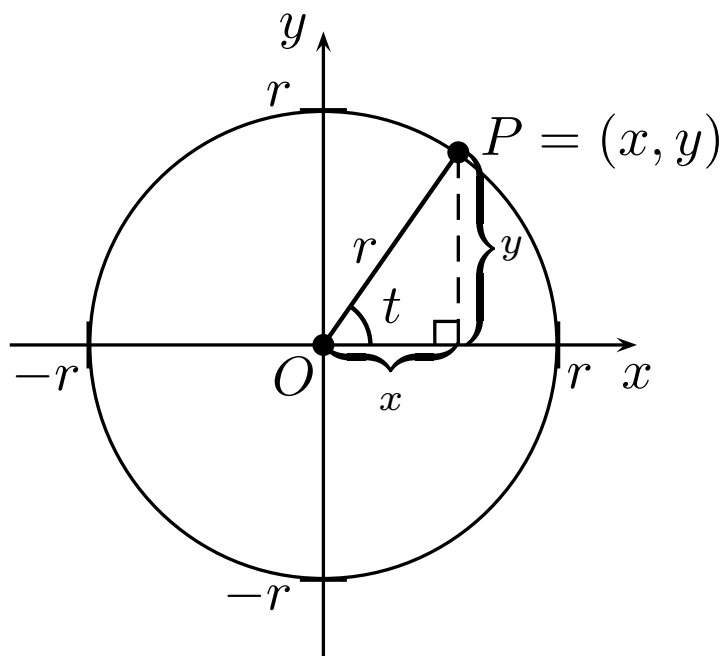
Alltså:

$$\cos t = \frac{x}{r}$$

$$\sin t = \frac{y}{r}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y}{x}$$

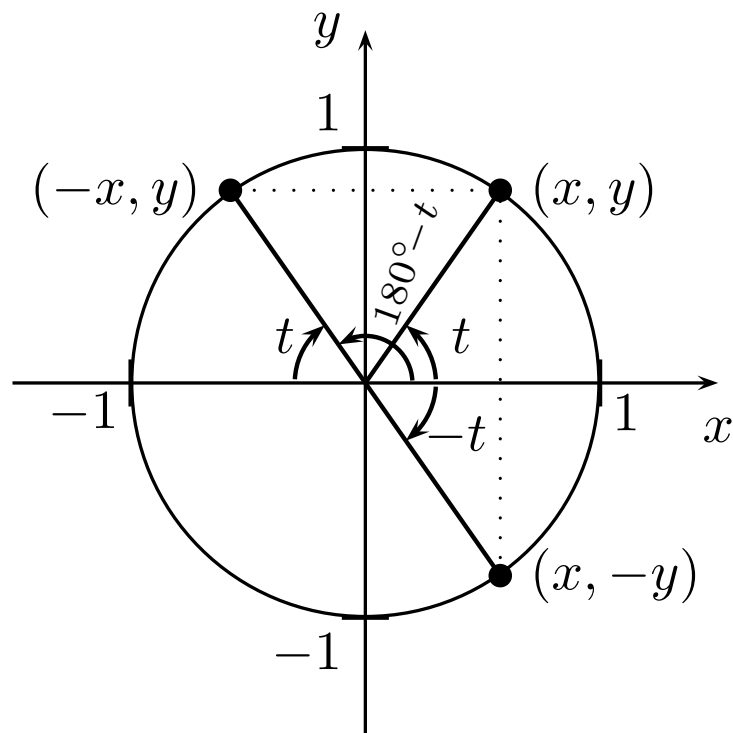
- Detta sammanfaller med vår tidigare definition av sinus, cosinus, och tangens för spetsiga vinklar (mellan 0° och 90°):



$$\cos t = \frac{x}{r}$$

$$\sin t = \frac{y}{r}$$

$$\tan t = \frac{y}{x}$$



Symmetrier

$$\sin(180^\circ - t) = \sin t$$

$$\cos(180^\circ - t) = -\cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t \quad (\text{udda})$$

$$\cos(-t) = \cos t \quad (\text{jämn})$$

Exempel.

$$\clubsuit \sin(150^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\clubsuit \cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\clubsuit \sin(-45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\clubsuit \cos(-45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Symmetrier (forts.)

$$\sin(180^\circ + t) = -\sin t \quad (\text{ett halvt varv})$$

$$\cos(180^\circ + t) = -\cos t$$

$$\sin(90^\circ - t) = \cos t \quad (\text{spegling i linjen } y = x)$$

$$\cos(90^\circ - t) = \sin t$$

Periodicitet

- Adderar vi ett helt antal varv kommer vi tillbaka till samma punkt:

$$\sin(t + n \cdot 360^\circ) = \sin t \quad (n \text{ heltal})$$

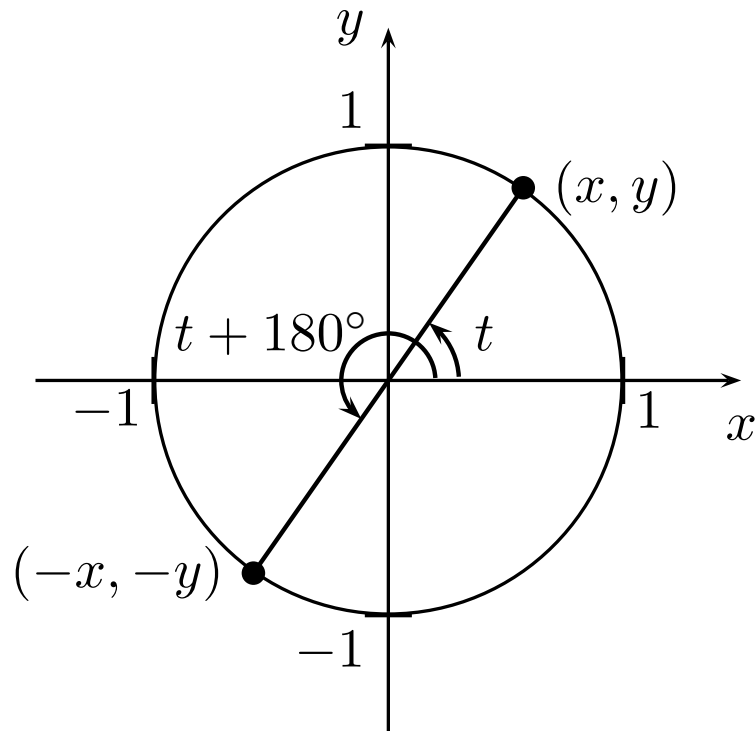
$$\cos(t + n \cdot 360^\circ) = \cos t$$

Exempel.

$$\clubsuit \quad \sin(790^\circ) = \sin(70^\circ + 720^\circ) = \sin(70^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin(70^\circ)$$

- För tangens gäller:

$$\tan(t + n \cdot 180^\circ) = \tan t \quad (n \text{ heltal})$$



$$\begin{aligned} \tan(t + 180^\circ) &= \frac{\sin(t + 180^\circ)}{\cos(t + 180^\circ)} \\ &= \frac{-\sin t}{-\cos t} = \tan t \end{aligned}$$

Exempel.

$$\clubsuit \quad \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Trigonometriska funktioner och deras grafer

- Vi börjar med att rita graferna till $y = \sin x$ och $y = \cos x$.
- Funktionerna är *periodiska* med period 360° :

$$\sin(x + n \cdot 360^\circ) = \sin(x) \quad (n \text{ heltal})$$

$$\cos(x + n \cdot 360^\circ) = \cos(x)$$

- Sinus är *udda*:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Cosinus är *jämn*:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- Det räcker därför att göra en värdetabell för $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

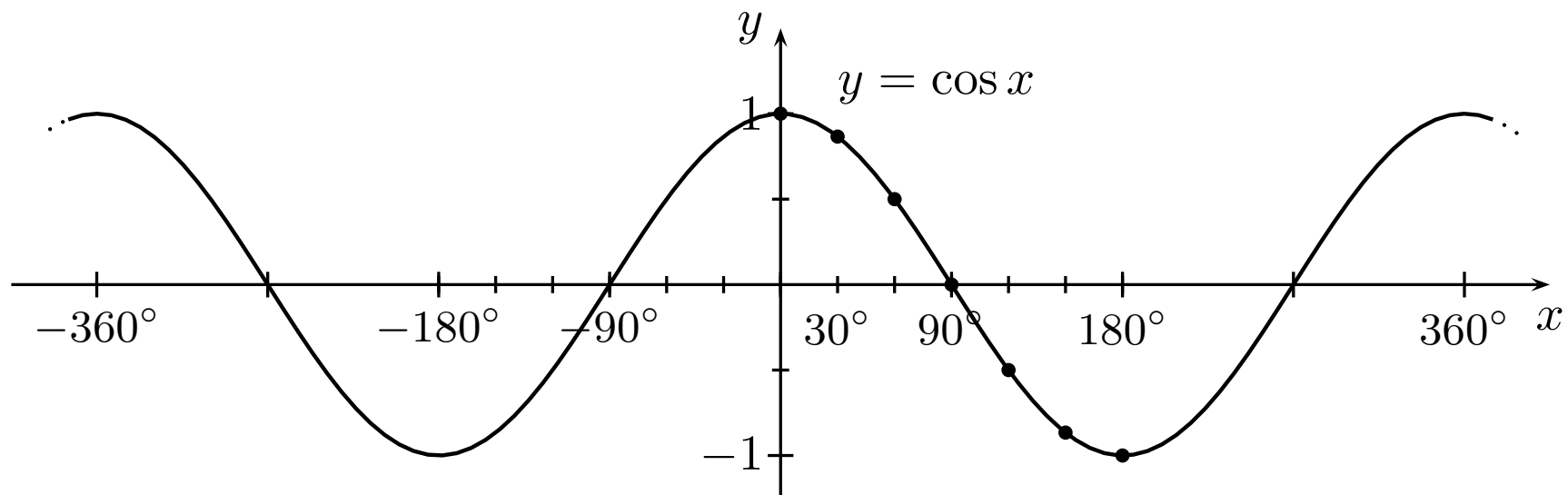
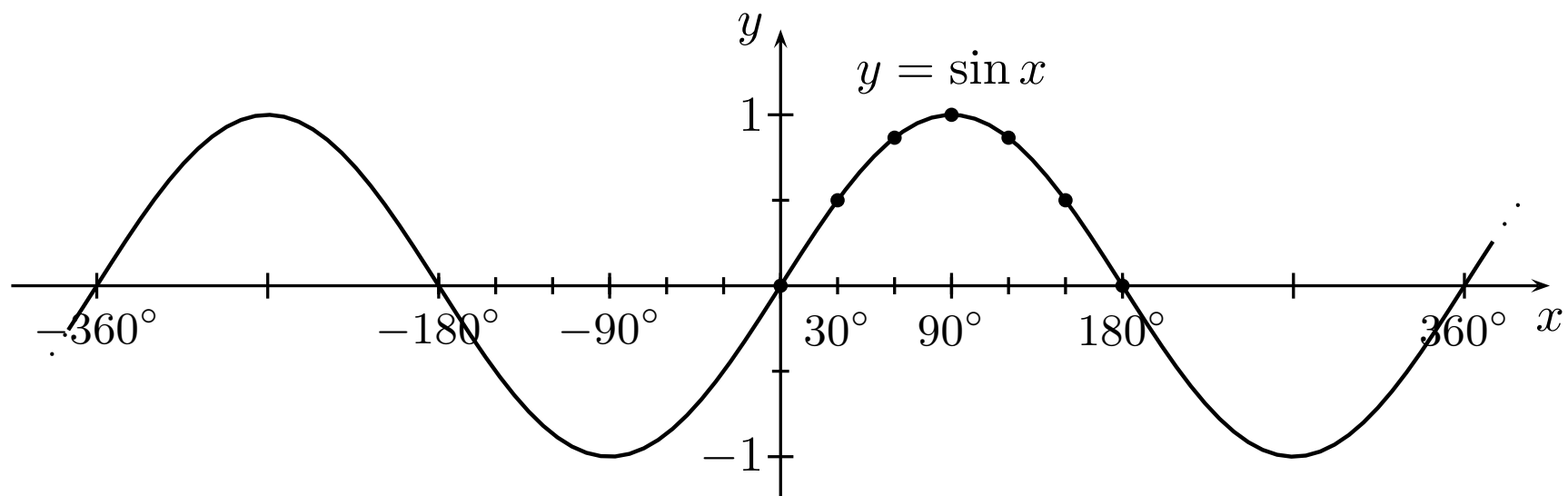
Värdetabell:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\approx 0.87}$

Kom ihåg: $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$

$\cos(180^\circ - x) = -\cos(x)$



- Vi ritar nu grafen till $y = \tan x$.
- Tangens är *periodisk* med period 180° :

$$\tan(x + n \cdot 180^\circ) = \tan(x) \quad (n \text{ heltal})$$

- Tangens är *udda*:

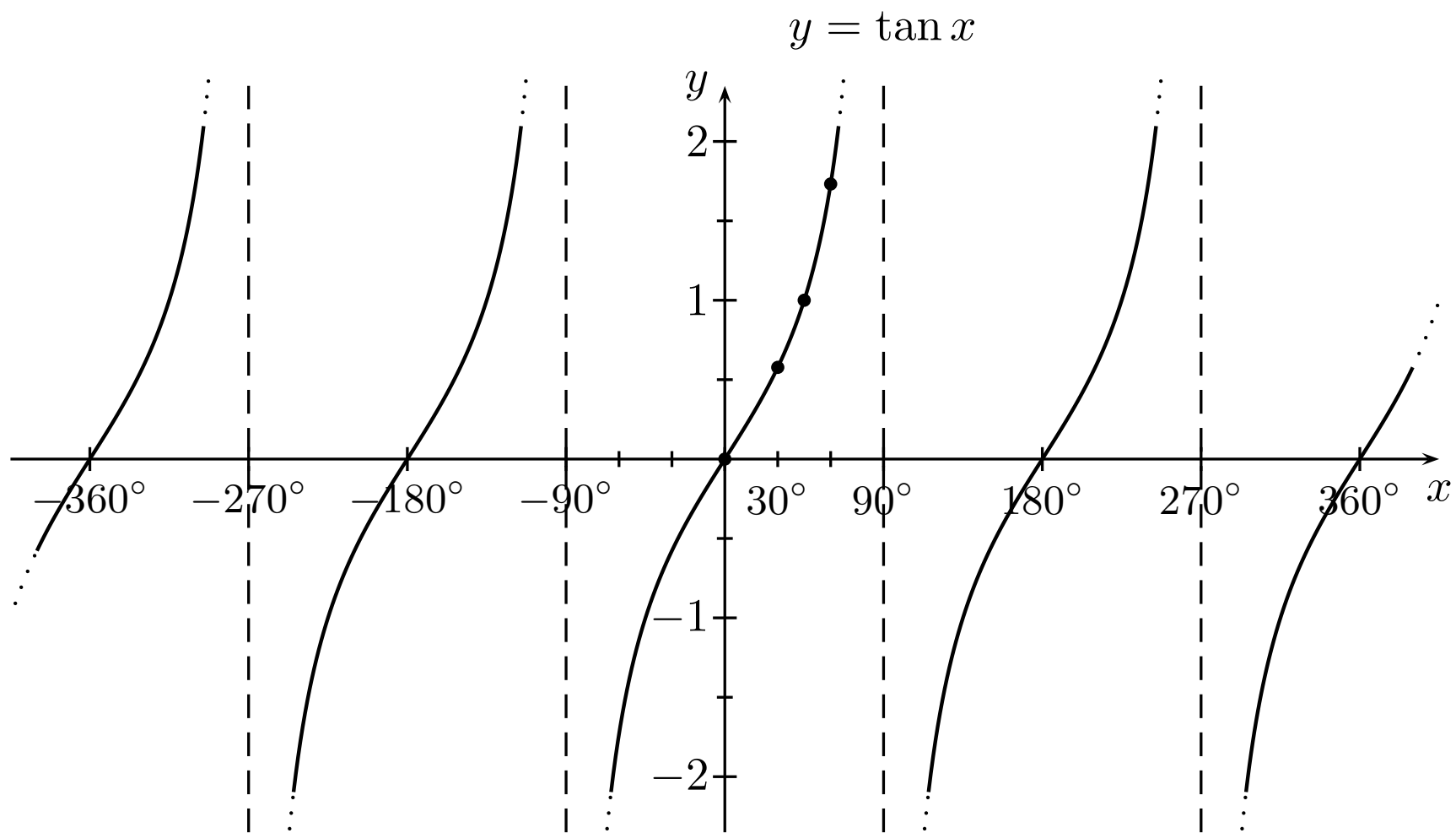
$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

- Det räcker därför att göra en värdetabell för $0^\circ \leq x < 90^\circ$.

Värdetabell:

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	odef.
		$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\approx 0.58}$		$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\approx 1.73}$	

Notera: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ närmar sig $+\infty$, då x närmar sig 90°



- Vi betraktar nu funktioner på formen:

$$y = A \sin(kx)$$

$$y = A \cos(kx)$$

där $A > 0$ kallas *amplitud*, och $k > 0$ kallas *vinkelfrekvens*.

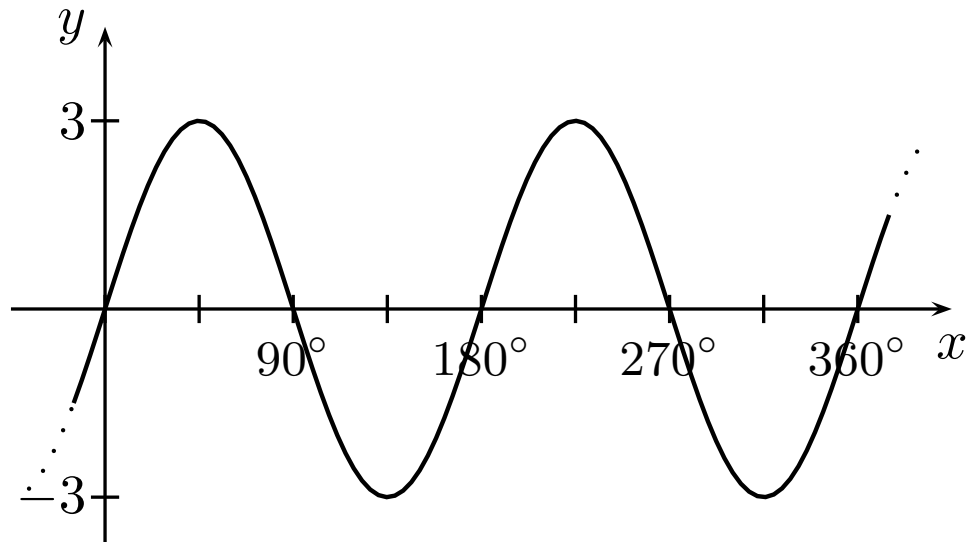
- Funktionsvärdena varierar mellan $+A$ och $-A$.
- En cykel genomlöps då

$$0^\circ \leq kx \leq 360^\circ, \quad \text{d.v.s.}$$

$$0^\circ \leq x \leq \frac{360^\circ}{k}$$

- *Perioden* blir alltså $\frac{360^\circ}{k}$.

Exempel. $y = 3 \sin(2x)$

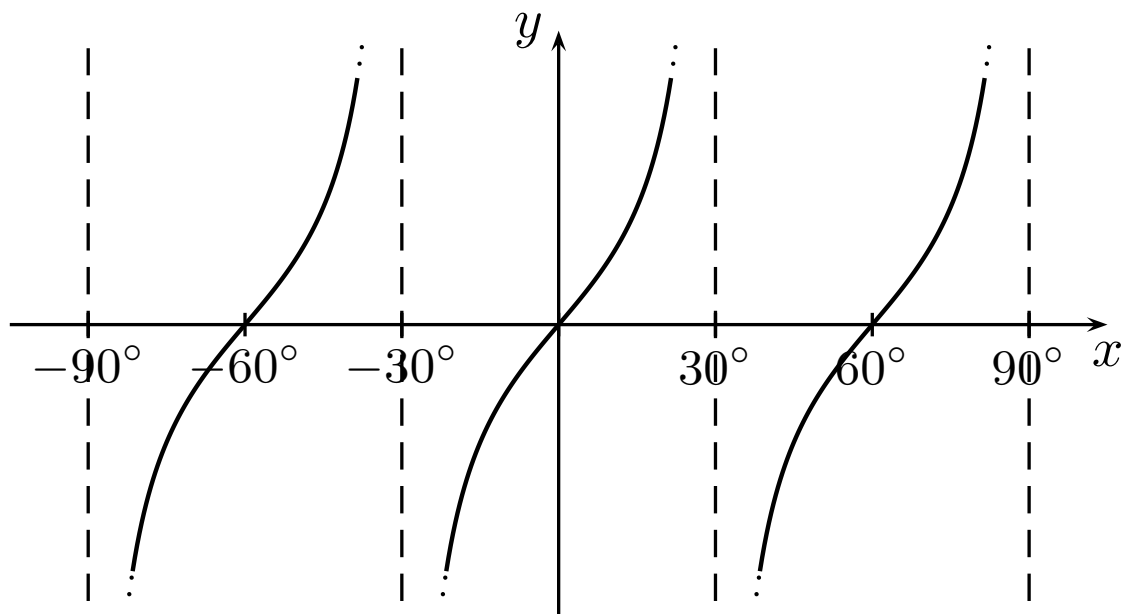


Notera: $\text{Perioden} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

2 hela cykler genomlöps då x ökar med 360° .

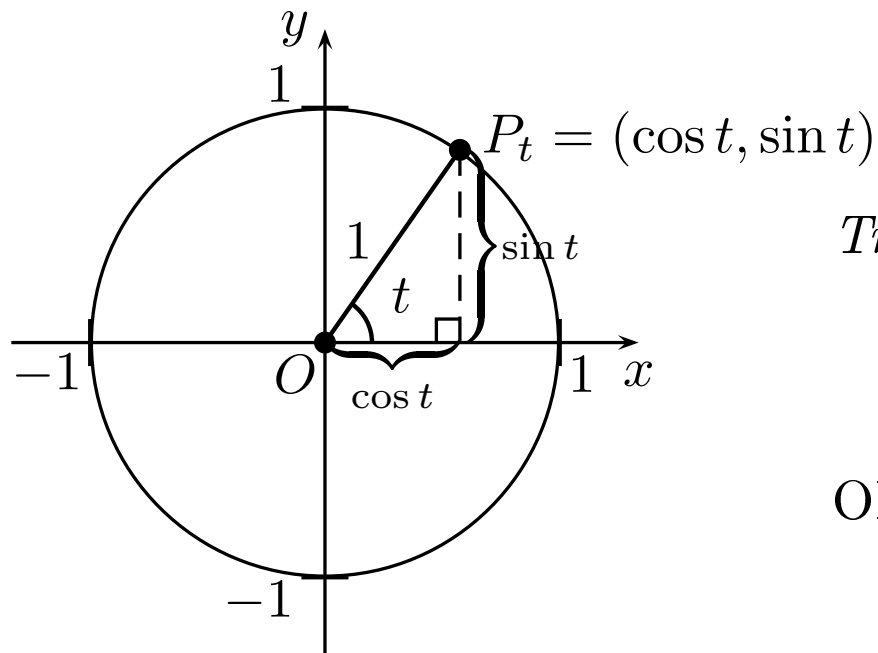
- För $y = \tan(kx)$ blir perioden $\frac{180^\circ}{k}$, och k hela cykler genomlöps då x ökar med 180° .

Exempel. $y = \tan(3x)$



Trigonometriska identiteter

- Definitionerna av $\sin t$ och $\cos t$, samt Pythagoras sats, ger:



Trigonometriska ettan:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

OBS: $(\sin t)^2$ skrivs $\sin^2 t$

- Notera att trigonometriska ettan gäller för *alla* vinklar t . En sådan likhet kallas för en *identitet*.
- Vi visar nu några fler identiteter.

Additions- och subtraktionsformler

- *Additionsformler* för sinus och cosinus:

$$\sin(s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

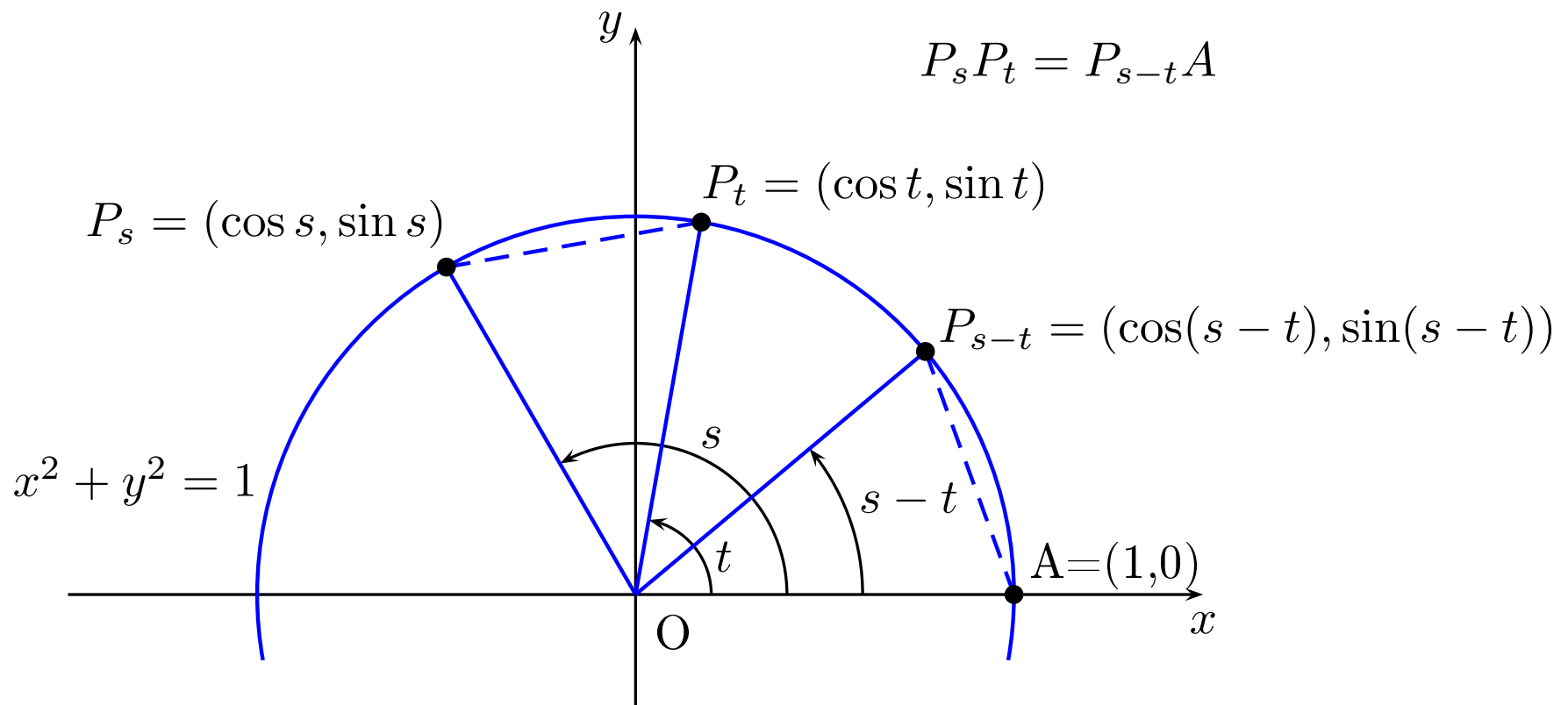
$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

- *Subtraktionsformler* för sinus och cosinus:

$$\sin(s - t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$$

Bevis av subtraktionsformeln för cosinus



Avståndsformeln ger:

$$(P_s P_t)^2 = (P_{s-t} A)^2$$

$$(\cos s - \cos t)^2 + (\sin s - \sin t)^2 = (\cos(s - t) - 1)^2 + \sin^2(s - t)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 s - 2 \cos s \cos t + \cos^2 t + \sin^2 s - 2 \sin s \sin t + \sin^2 t \\ = \cos^2(s - t) - 2 \cos(s - t) + 1 + \sin^2(s - t) \end{aligned}$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$$

□

Additionsformeln för cosinus följer, genom att utnyttja att sinus är *udda* och cosinus *jämn*:

$$\begin{aligned}\cos(s + t) &= \cos(s - (-t)) \\ &= \cos s \cos(-t) + \sin s \sin(-t) \\ &= \cos s \cos t - \sin s \sin t\end{aligned}$$

Additionsformeln för sinus följer ut formlerna $\sin(90^\circ - t) = \cos t$ och $\cos(90^\circ - t) = \sin t$ för komplementvinklar:

$$\begin{aligned}\sin(s + t) &= \cos(90^\circ - (s + t)) = \cos((90^\circ - s) - t) \\ &= \cos(90^\circ - s) \cos t + \sin(90^\circ - s) \sin t \\ &= \sin s \cos t + \cos s \sin t\end{aligned}$$

Subtraktionsformeln för sinus följer, analogt med ovan, ur udda/jämnegenskaperna hos sinus och cosinus. □

Formler för dubbla vinkeln

- Sätt $s = t$ i additionsformlerna, ger formler för *dubbla vinkeln*:

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos(2t) = \underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t} - \underbrace{\sin^2 t}_{1 - \cos^2 t}$$

- Använder vi trigonometriska ettan, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, kan formeln för dubbla vinkeln för cosinus skrivas om:

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$$

vilket ger:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

Exempel. ♣ Visa additionsformeln för tangens:

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

Bevis:

$$\text{V.L.} = \frac{\sin(s + t)}{\cos(s + t)} = \frac{\sin s \cos t + \cos s \sin t}{\cos s \cos t - \sin s \sin t}$$

$$= (\text{dividera täljare och nämnare med } \cos s \cos t)$$

$$= \frac{\frac{\sin s}{\cos s} + \frac{\sin t}{\cos t}}{1 - \frac{\sin s \sin t}{\cos s \cos t}} = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t} = \text{H.L.}$$

Exempel. ♣ Visa att: $\cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$

Bevis:

$$\text{V.L.} = \cos(2t + t) = \cos(2t) \cos t - \overbrace{\sin(2t)}^{2 \sin t \cos t} \sin t$$

$$= (2 \cos^2 t - 1) \cos t - 2 \sin^2 t \cos t$$

$$= (2 \cos^2 t - 1) \cos t - 2(1 - \cos^2 t) \cos t$$

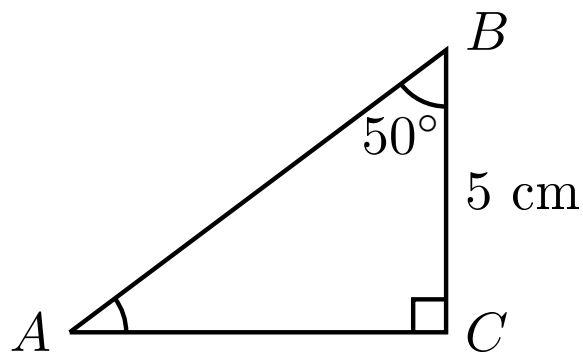
$$= 2 \cos^3 t - \cos t - 2 \cos t + 2 \cos^3 t$$

$$= 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \text{H.L.}$$

Triangelsolvering

- Att solvea en triangel innebär att bestämma vissa storheter (vinklar, sidor) i en triangel, som är given med hjälp av ett antal andra storheter.
- För rätvinkliga trianglar kan definitionen av sinus, cosinus och tangens för spetsiga vinklar, samt *Pythagoras sats*, användas.
- För allmänna trianglar kan *sinus-* och *cosinussatsen* användas.

Exempel. Triangeln $\triangle ABC$ har en rät vinkel vid C , $B = 50^\circ$ och $BC = 5$ cm. Beräkna resterande sidor och vinklar i triangeln.



$$A = 180^\circ - \overbrace{B}^{50^\circ} - \overbrace{C}^{90^\circ} = 40^\circ$$

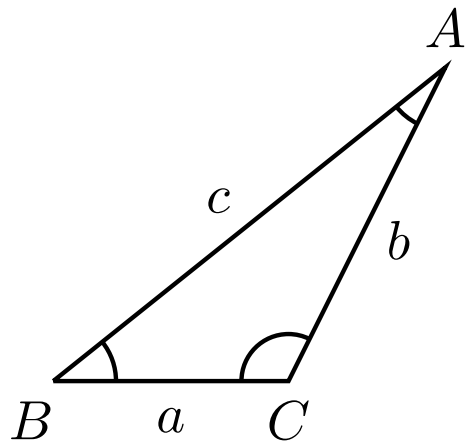
$$\tan B = \frac{AC}{BC}$$

$$\begin{aligned} AC &= BC \cdot \tan B \\ &= 5 \cdot \tan 50^\circ \approx 5.96 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} \approx 7.78 \text{ cm}$$

Sinussatsen

Formulering



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

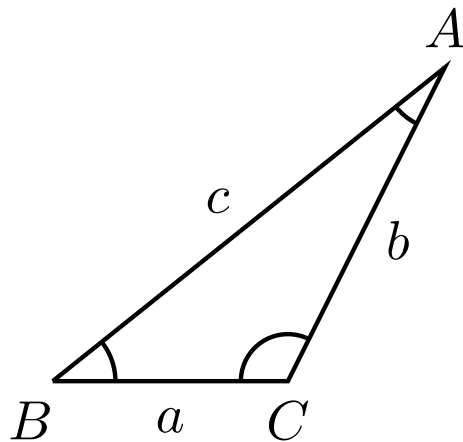
eller

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- Sinussatsen kan användas för att bestämma resterande sidor och vinklar i allmänna trianglar, i följande fall:
 1. En sida, två vinklar kända.
 2. Två sidor, en (ej mellanliggande) vinkel kända.
OBS! Kan ge två fall.

Cosinussatsen

Formulering



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

- Cosinussatsen kan användas för att bestämma okända sidor och vinklar i allmänna trianglar, i följande fall:
 1. Tre sidor kända.
 2. Två sidor och *mellanliggande vinkel* kända.