

Inledande matematik M/TD

Niklas Ericsson

2012-09-07

Idag:

Adams/Essex. *Calculus: A Complete Course*.

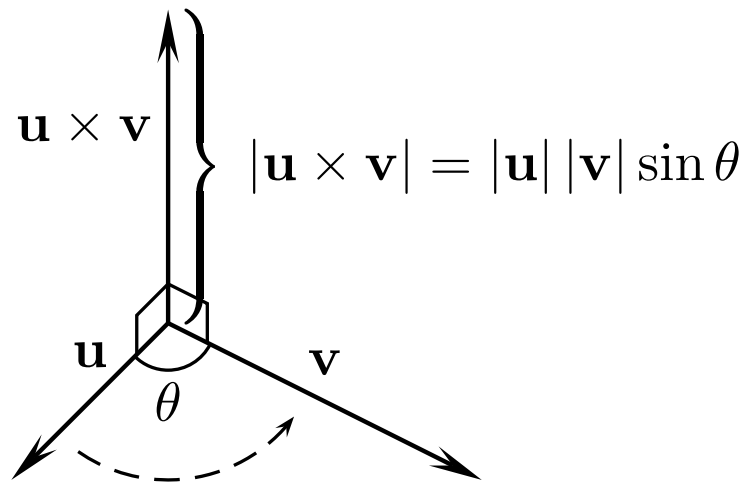
10.3 *The Cross Product in 3-Space*

10.4 *Planes and Lines*

- Vektorprodukt
- Plan och linjer (avstånd på måndag)

Vektorprodukt (10.3)

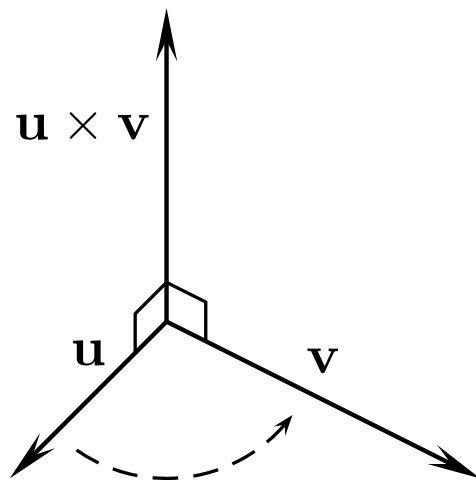
- Vektorprodukten (*kryssprodukten*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ är den *vektor* som definieras:



(i): $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$,
där θ är vinkeln ($0 \leq \theta \leq \pi$)
mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

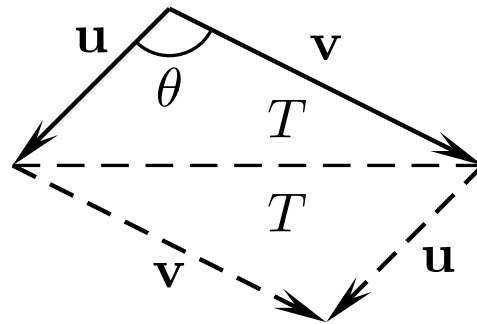
(ii): $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot
både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och har sam-
ma riktning som skruvrikt-
ningen hos en högergängad
skruv, som skruvas kortaste
vägen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$.

Kommentar. Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tagna i denna ordning bildar ett *högersystem*. De är riktade som tumme, pekfinger resp. långfinger på höger hand.



Areatolkning av vektorproduktens längd

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$, är arean ($2T$) av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$:



$$T = \frac{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta}{2} = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2} \quad (\text{areasatsen för trianglar})$$

Räknelagar för vektorprodukt

$$1. \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{nollvektorn})$$

$$2. \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (\text{vektorprodukten är antikommutativ})$$

$$3. \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \quad (\text{distributiv lag})$$

$$4. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (\text{distributiv lag})$$

$$5. (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$6. \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

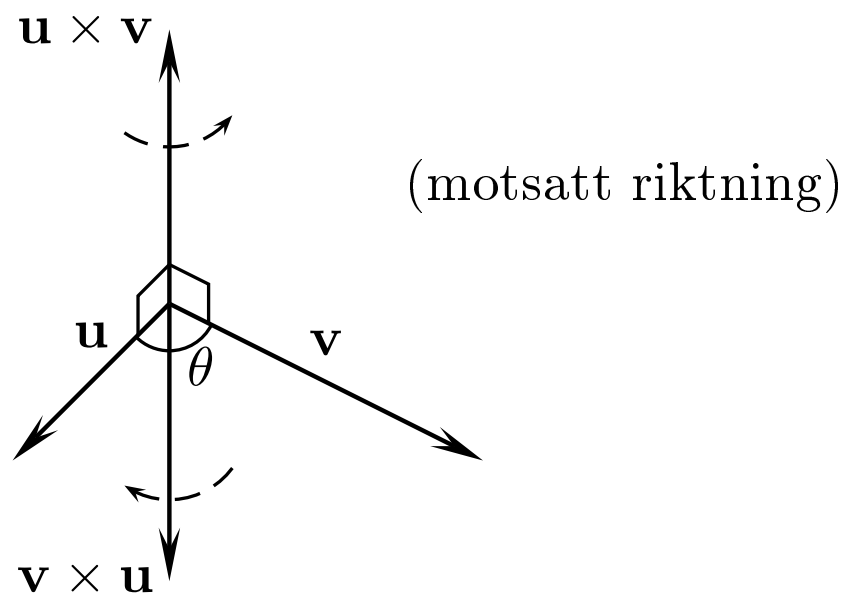
OBS! Vektorprodukten är ej associativ. I allmänhet är

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

1., 2., 5. och 6. följer direkt ur definitionen av vektorprodukt. Som exempel:

1.: $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{u}| \sin 0 = 0,$

2.: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$ (längd lika)



Den distributiva lagen 3. kan visas genom att utnyttja egenskaper hos den *skalära trippelprodukten*, vilken vi skall definiera lite senare.

Den andra distributiva lagen 4. följer ur den första:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad (2.)$$

$$= -\mathbf{w} \times \mathbf{u} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (3.)$$

$$= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (2.)$$

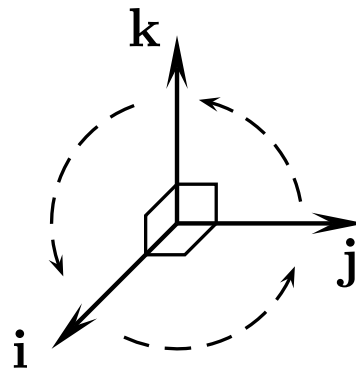
För basvektorerna $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ och $\mathbf{k}$ gäller:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$



$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

På samma sätt:

$$|\mathbf{j} \times \mathbf{k}| = |\mathbf{k} \times \mathbf{i}| = 1$$

Exempel. Låt $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times (2\mathbf{j}) + \mathbf{i} \times \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0} + 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - \mathbf{k} \times \mathbf{i}$$

$$= 2\mathbf{k} - \mathbf{j}$$

Exempel. (Exercise **10.3** 5) Beräkna en enhetsvektor som är vinkelrät mot vektorerna $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ och $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \mathbf{i} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{i} \times \mathbf{k} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{k} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{i}$$

Normera:

$$\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Vektorproduktens komponenter

- Exempelen kan generaliseras till godtyckliga vektorer $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ och $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

- Räknelagarna för vektorprodukt ger:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

- För att enklare kunna beräkna vektorproduktens komponenter introducerar vi nu begreppet *determinant*, vilket studeras utförligt i kursen Linjär algebra (lp 3).

Determinant

- En determinant är ett *tal* som beräknas enligt ett bestämt uttryck vilket involverar elementen i en kvadratisk *matris* (rektangulärt schema av tal).

- För en 2×2 -matris $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ gäller:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

För en 3×3 -matris gäller (“utveckla längs rad 1”):

$$\begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

- *Exempel.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- *Exempel.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2 - (-3)) - 3 \cdot (8 - 6) + 2 \cdot (4 - (-2))$$

$$= 5 - 6 + 12 = 11$$

Beräkning av vektorprodukt med determinant

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

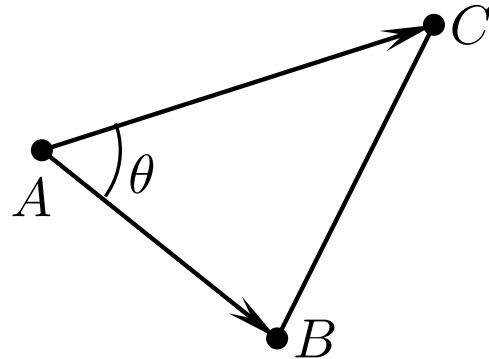
$$= \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{u_2v_3 - u_3v_2} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{u_1v_3 - u_3v_1} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{u_1v_2 - u_2v_1} \mathbf{k}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Exempel. Låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ och $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}_{2-9} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{-4-(-3)} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{6-1} \mathbf{k} \\ &= -7\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Exempel. Beräkna arean av triangeln med hörn i punkterna $A = (1, 3, -2)$, $B = (3, 2, 1)$ och $C = (0, 6, -4)$.



$$\vec{AB} = (3 - 1)\mathbf{i} + (2 - 3)\mathbf{j} + (1 - (-2))\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

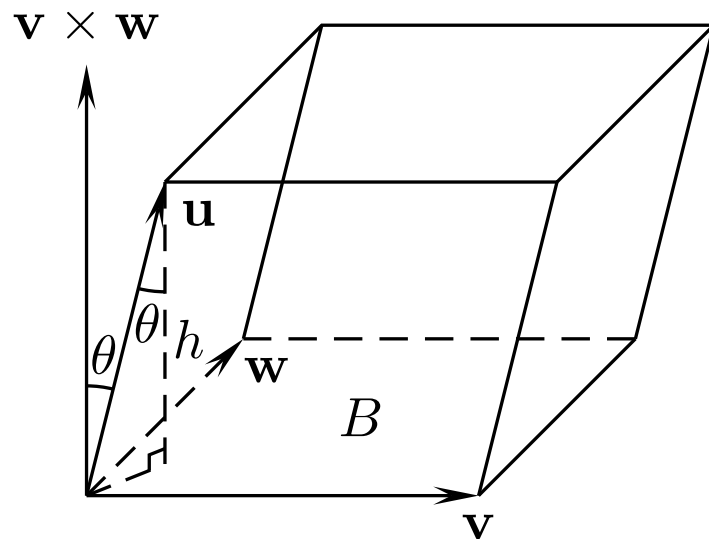
$$\vec{AC} = (0 - 1)\mathbf{i} + (6 - 3)\mathbf{j} + (-4 - (-2))\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{area} &= \frac{|\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta}{2} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = (\text{enl. förra exemplet}) = \\ &= \frac{|-7\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}|}{2} = \frac{\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2} \end{aligned}$$

Volym av parallelepiped

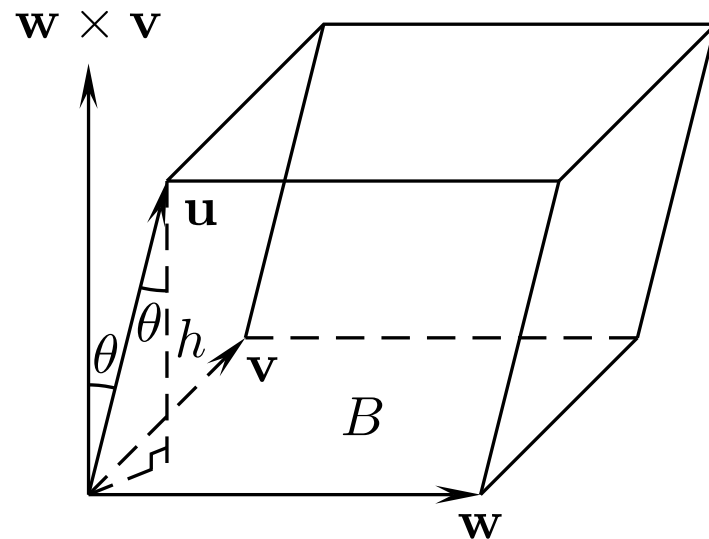
Låt V vara volymen av den parallelepiped, som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Om vinkeln θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ är spetsig ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är ett högersystem) fås:

$$V = Bh = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| |\mathbf{u}| \cos \theta = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$



Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är ett vänstersystem, fås istället:

$$V = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$



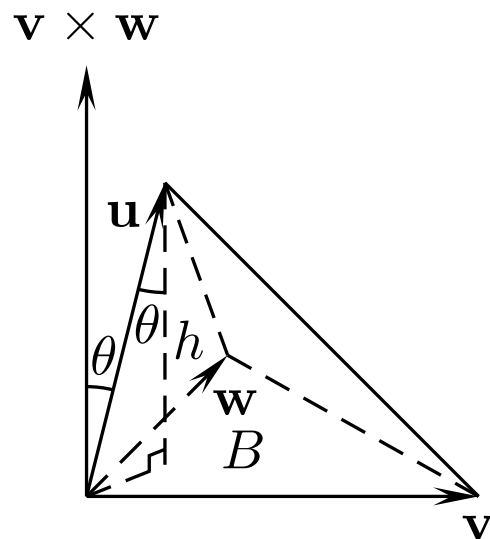
I bägge fallen gäller: $V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$

Volym av tetraeder

För en tetraeder som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ kan volymen V beräknas analogt.

Exempel. (Exercise **10.3** 14)

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}{2} \frac{|\mathbf{u}| \cos \theta}{3} = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{6}$$



Skalär trippelprodukt

- Storheten $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ kallas den *skalära trippelprodukten* mellan vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.
- Om $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ så är vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ *komplana*, d.v.s. de ligger (avsatta från samma punkt) i ett plan.

Den skalära trippelprodukten kan uttryckas med en determinant:

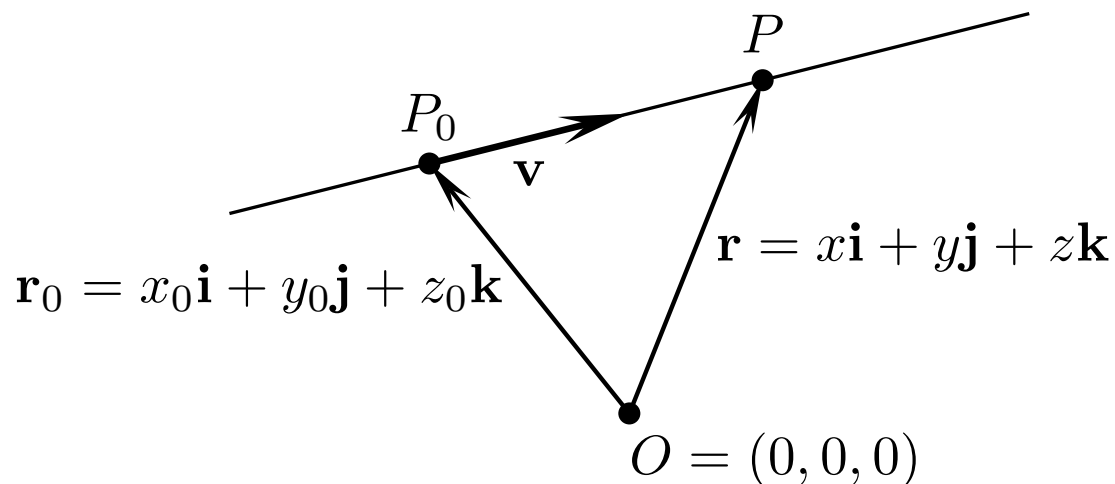
$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Plan, linjer och avstånd (10.4)

En **linje** är entydigt bestämd om vi känner *en punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ på linjen och en *vektor* $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ riktad längs linjen.



Ortsvektorn $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ för en godtycklig punkt $P = (x, y, z)$ på linjen kan skrivas:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (\text{vektorform})$$

Parameterform:
$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$

Standardform:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Exempel. Vektorekvationen för linjen som går genom punkten $P_0 = (2, 1, 3)$ med Ortsvektor $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, och som är parallell med vektorn $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, är:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= (2 + 4t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + (3 + 5t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

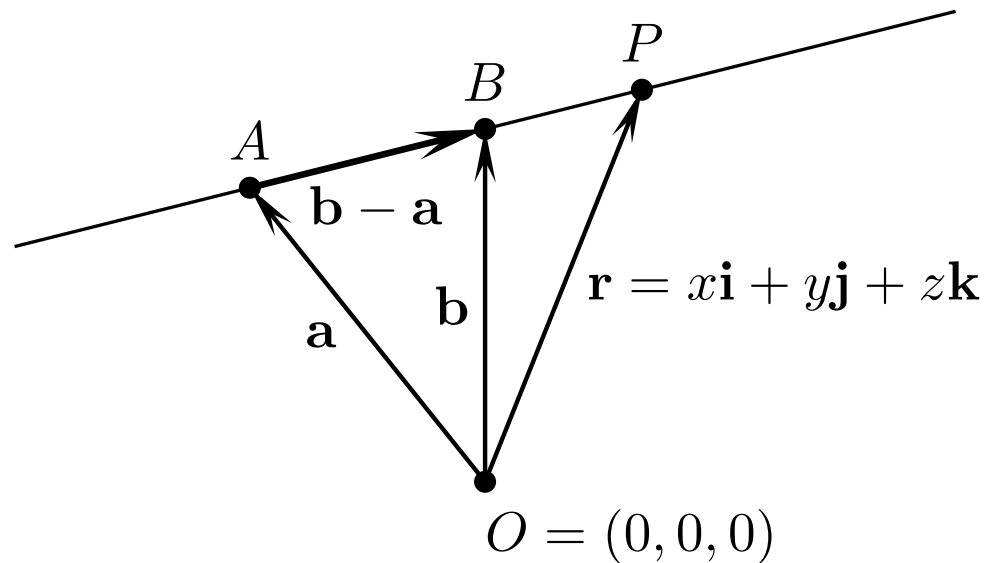
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 + 4t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 3 + 5t \end{array} \right. \quad \text{Standardform: } \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 3}{5}$$

Varje värde på *parametern* t ger oss Ortsvektorn för en punkt på linjen. Som ett exempel ger $t = 1$ punkten $P = (6, 0, 8)$

Linje given av två punkter

Om vi känner *två punkter* A och B på linjen, med Ortsvektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, kan vi välja $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ och får:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

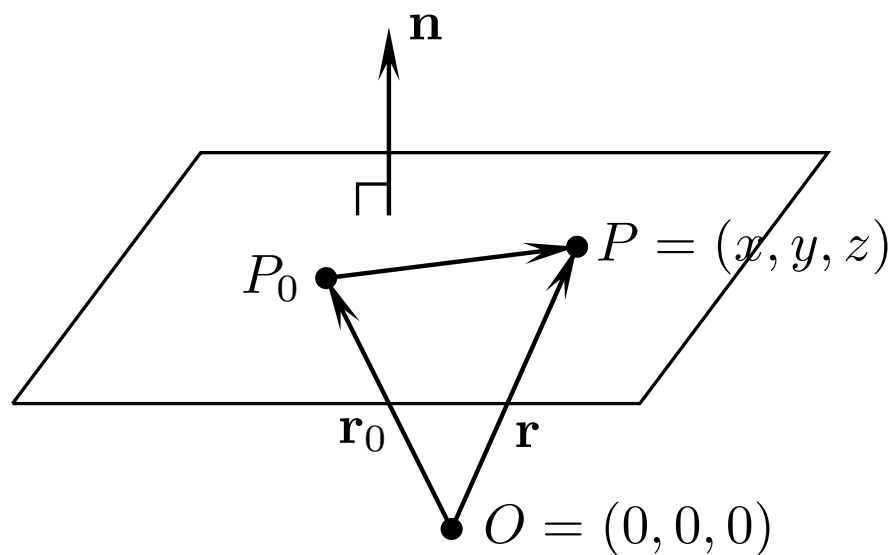


Exempel. Vektorekvationen för linjen genom punkterna $A = (-1, 3, 1)$ och $B = (2, 0, 4)$ är:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= (-1 + 3t)\mathbf{i} + (3 - 3t)\mathbf{j} + (1 + 3t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + 3t \\ y & = & 3 - 3t \\ z & = & 1 + 3t \end{array} \right. \quad \text{Standardform: } \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{3}$$

Ett **plan** är entydigt bestämt om vi känner *en punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i planet*, och *en normalvektor* $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ *till planet*. (En normalvektor är en vektor som är vinkelrät mot planet.)



För en godtycklig punkt $P = (x, y, z)$ i planet, gäller att:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{Planets ekv. på vektorform}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{Skalär form}$$

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{Standardform}$$

Exempel. Med $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ och $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ blir planets
ekvation:

$$2(x - 2) + (y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

$$2x + y + 2z = 5$$

Plan givet av tre punkter

Ett plan bestäms också entydigt av *tre punkter* A , B och C (som inte ligger på en rät linje). I detta fall kan en normalvektor beräknas med hjälp av vektorprodukt.

