

Inledande matematik M/TD

Niklas Ericsson

2012-09-10

Idag:

Adams/Essex. *Calculus: A Complete Course*.

10.4 *Planes and Lines*

- Plan och linjer (några exempel på tavlan)

Lay. *Linear Algebra and Its Applications*.

1.1 *Systems of Linear Equations*

- Linjära ekvationssystem (introduktion/terminologi på OH + några exempel på tavlan)

Linjära ekvationssystem

- En *linjär ekvation* i variablerna $x_1, \dots, x_n$ (de obekanta) är en ekvation som kan skrivas på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

där b och *koefficienterna* $a_1, \dots, a_n$ är (kända) tal.

- Ett *linjärt ekvationssystem* består av en eller flera linjära ekvationer i samma variabler, t.ex.

$$\begin{array}{rcccccl} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 13 \\ x_1 & & & & - & 5x_3 & = & -14 \end{array}$$

- En *lösning* till ett linjärt ekvationssystem är en uppsättning tal som satisfierar *varje* ekvation i systemet. Systemet ovan har en lösning $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

- Mängden av samtliga lösningar kallas systemets *lösningsmängd*.
- Två linjära ekvationssystem kallas *ekvivalenta* om de har samma lösningsmängd, d.v.s. varje lösning till det första systemet är också en lösning till det andra systemet, och omvänt.
- Att lösa ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta, t.ex.

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \end{array}$$

innebär geometriskt att bestämma skärningspunkten mellan två räta linjer. Det finns tre möjligheter (vilket gäller allmänt):

1. Ingen lösning (två olika parallella linjer)
2. Exakt en lösning (icke parallella linjer)
3. Oändligt många lösningar (sammanfallande linjer)

- Ett linjärt ekvationssystem kallas *konsistent* om det har antingen en eller oändligt många lösningar.
- Ett linjärt ekvationssystem kallas *inkonsistent* om det saknar lösning.

Matrisnotation

- Det är koefficienterna och högerleden som innehåller den väsentliga informationen om ett linjärt ekvationssystem.
- Det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & & - & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

har *koefficientmatrisen*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

och *totalmatrisen* (utvidgade koefficientmatrisen)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Totalmatrisen ovan har 3 rader och 4 kolonner (kolumner) och kallas för en 3×4 -matris.

Eliminationsmetoden

- *Eliminationsmetoden* (Gauss-elimination) är en systematisk metod för att lösa linjära ekvationssystem.
- Den grundläggande strategin är att ersätta ett linjärt ekvationssystem med ett ekvivalent system (d.v.s. ett system med samma lösningsmängd som det ursprungliga systemet) som är enklare att lösa.
- I grova drag:
 1. Använd x_1 -termen i den första ekvationen, för att eliminera x_1 -termerna i de resterande ekvationerna $(2, 3, \dots, n)$
 2. Använd x_2 -termen i den andra ekvationen, för att eliminera x_2 -termerna i de resterande ekvationerna $(3, 4, \dots, n)$
 3. osv.

vilket resulterar i ett ekvivalent system som är enkelt att lösa.

Elementära radoperationer

- För att förenkla det linjära ekvationssystemet, utnyttjar vi följande tre operationer:
 1. Ersätt en ekvation (rad) med summan av sig själv och en multipel av en annan ekvation (rad)
 2. Byt plats på två ekvationer (rader)
 3. Multiplicera en ekvation (rad) med ett tal skilt från noll.
- Operationerna kan utföras på hela ekvationssystemet eller enbart på systemets totalmatris. I det senare fallet kallas de *elementära radoperationer*.
- Två matriser A och B kallas *radekvivalenta* ($A \sim B$) om den ena kan transformeras till den andra genom en följd av elementära radoperationer.

- Det är viktigt att inse att de elementära radoperationerna inte ändrar lösningsmängden.
- Att platsbyte mellan två rader (ekvationer) ej gör det är uppenbart.
- Vi visar med ett par exempel att de övriga två operationerna ej heller gör det.

- Multiplicera den första raden (ekvationen) med 3.

Multiplicera därefter den första raden (ekvationen) med $1/3$.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_2 = 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \sim$$

$$\begin{array}{rcl} 6x_1 & - & 3x_2 = 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \sim$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_2 = 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ersätt den första raden (ekvationen) med summan av sig själv och 2 gånger den andra raden (ekvationen).

Ersätt därefter den första raden (ekvationen) med summan av sig själv och -2 gånger den andra raden (ekvationen).

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_2 = 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow$

$\sim$

$$\begin{array}{rcl} 8x_1 & + & 7x_2 = 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} 8 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow$

$\sim$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_2 = 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

Tavelexempel

$$1. \left\{ \begin{array}{rclcl} & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$2. \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \end{array} \right.$$

$$3. \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \end{array} \right.$$