

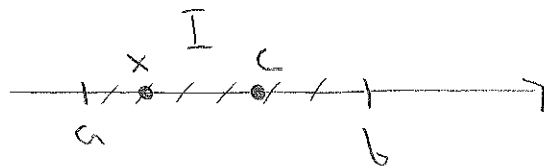
①

BM 2 Lipschitz-kontinuitet (forts.)

Definition. En funktion f är begränsad på intervallet I om det finns ett tal M sådant att

$$|f(x)| \leq M \quad \text{för alla } x \in I$$

Sats Om f är Lipschitz-kontinuerlig på ett begränsat intervall I , så är f begränsad på I .



Tag en fix punkt $c \in I$.

För alla $x \in I$ fås:

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= |f(x) - f(c) + f(c)| \\
 &\leq |f(x) - f(c)| + |f(c)| \\
 &\leq L|x - c| + |f(c)| \\
 &\leq \underbrace{L(b - a) + |f(c)|}_M
 \end{aligned}$$

②

Summor, differenser, produkter, kvoter och sammansättningar av Lipschitz-kontinuerliga funktioner är (under vissa förutsättningar om begränsning) också Lipschitz-kontinuerliga.

Sats. Antag att f och g är Lipschitz på I , med Lipschitz-konstanter L_f och L_g .

För linjär-kombinationen $\alpha f + \beta g$ fäs:

$$\begin{aligned} & | \alpha f(x_1) + \beta g(x_1) - (\alpha f(x_2) + \beta g(x_2)) | \\ &= | \alpha (f(x_1) - f(x_2)) + \beta (g(x_1) - g(x_2)) | \\ &\leq \underbrace{|\alpha| |f(x_1) - f(x_2)|}_{\leq L_f |x_1 - x_2|} + \underbrace{|\beta| |g(x_1) - g(x_2)|}_{\leq L_g |x_1 - x_2|} \\ &\leq \underbrace{(|\alpha| L_f + |\beta| L_g)}_L |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

③

För produkten fg fås (om vi dessutom antar f och g är begränsade på I):

$$\begin{aligned} & |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\ &= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\ &= |f(x_1)(g(x_1) - g(x_2)) + g(x_2)(f(x_1) - f(x_2))| \\ &\leq \underbrace{|f(x_1)|}_{\leq M_f} \underbrace{|g(x_1) - g(x_2)|}_{\leq L_g |x_1 - x_2|} + \underbrace{|g(x_2)|}_{\leq M_g} \underbrace{|f(x_1) - f(x_2)|}_{\leq L_f |x_1 - x_2|} \\ &\leq \underbrace{(M_f L_g + M_g L_f)}_L |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

4

För kvoten $\frac{f}{g}$ fäs:

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \right| \leq L |x_1 - x_2|$$

$$\text{Så} \quad L = \frac{M_f L_g + M_g L_f}{a^2}$$

om $|g(x)| \geq a > 0$ för alla $x \in I$.

För sammansättningen $f \circ g$ fäs:

$$|f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \leq L |x_1 - x_2|$$

$$\text{Så} \quad L = L_f L_g$$

Lipschitz-
konstant
på I_2

Lipschitz-konstant
på I_1

$$\left(g(x) \in I_2 \text{ för alla } x \in I_1 \right)$$

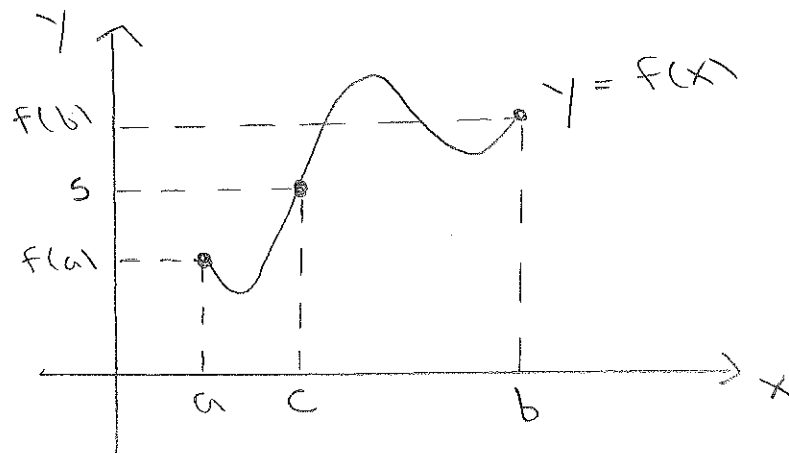
5

BM3 Talföljder

BM4 Bisektionsalgoritmen

Vårt mål är att bevisa Satsen
om mellanliggande värden (A2ams 1.4):

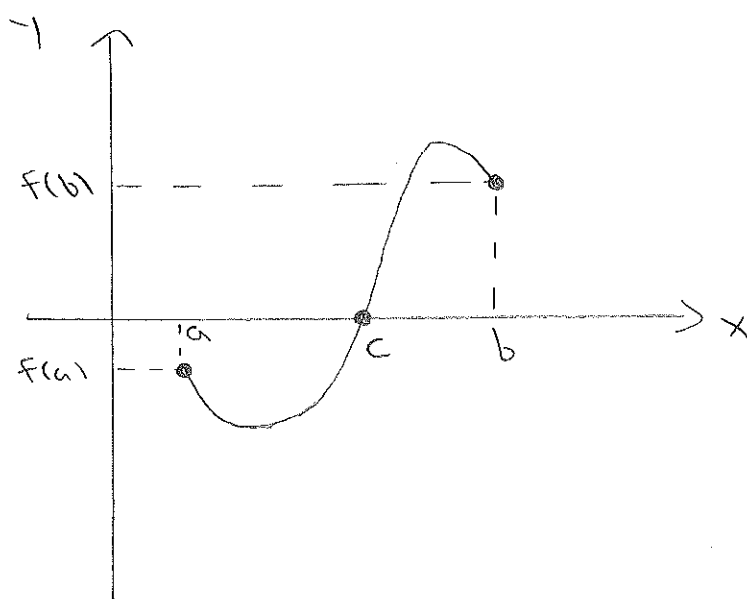
Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$,
och om s är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$,
så finns ett tal c i $[a, b]$ sådant
att $f(c) = s$.



6

Vi kommer att börja med att bevisa ett specialfall av Satsen om mellanliggande värden, som heter Bolzanos sats:

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$, och om $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken, så finns ett tal c i $[a, b]$ sådant att $f(c) = 0$.



⑦

Vi kommer att bevisa Bolzanos sats genom att konstruera en lösning (reellt tal) till ekvationen $f(x)=0$ med hjälp av bisektionsalgoritmen.

Vi repeterar / fördjupar först några egenskaper hos de reella talen.

(8)

Reellt tal = decimalutveckling

De reella talen är mängden av alla decimalutvecklingar (ändliga, periodiska eller icke-periodiska).

$$5 = 5.00000... = 5.\bar{0}$$

$$\frac{1}{4} = 0.25000... = 0.25\bar{0}$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333... = 0.\bar{3}$$

$$\frac{4}{33} = 0.121212... = 0.\overline{12}$$

rationella
tal

periodisk
decimal-
utveckling

$$\sqrt{2} = 1.414213...$$

$$\pi = 3.141592...$$

$$e = 2.718281...$$

irrationella
tal

icke-periodisk
decimal-
utveckling

Kom ihåg: Vi bevisade i Adams P.1 att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

9

Reellt tal = Cauchy-följd

Betrakta följande följd av rationella tal:

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 3.1 \quad \left(\frac{31}{10} \right)$$

$$a_2 = 3.14 \quad \left(\frac{314}{100} \right)$$

$$a_3 = 3.141$$

$$a_4 = 3.1415$$

$$a_5 = 3.14159$$

...

Allmänt: a_n = det rationella tal som
överensstämmer med

$$\pi = 3.1415926 \dots$$

i de första n decimalerna.

Notera: $\pi - a_0 = 0.1415926 \dots$

$$\pi - a_1 = 0.0415926 \dots$$

$$\pi - a_2 = 0.0015926 \dots$$

$$\pi - a_3 = 0.0005926 \dots$$

$$\pi - a_4 = 0.0000926 \dots$$

$$\pi - a_5 = 0.0000026 \dots$$

...

(10)

Allmänt: $|\tilde{r} - a_n| < 10^{-n}$

" a_n kan fås godtyckligt nära $\tilde{r}$
genom att välja n tillräckligt stort"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \tilde{r}$$

Formell definition.

Vi säger att följden $a = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$
är konvergent med gränsvärdet L ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

om för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett
naturligt tal N sådant att

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Vi skriver också: $a_n \rightarrow L$ då $n \rightarrow \infty$.

(11)

Talen a_n i vår följd kan alltså
fås godtyckligt nära π , bara vi
väljer n tillräckligt stort.

Men talen a_i och a_j i följden
ligger också godtyckligt nära
 varandra, bara vi väljer både
 i och j tillräckligt stora:

$$a_3 - a_2 = 3.141 - 3.14 = 0.001$$

$$a_4 - a_2 = 3.1415 - 3.14 = 0.0015$$

$$a_5 - a_2 = 3.14159 - 3.14 = 0.00159$$

...

$$\text{För alla } j \geq 2 \text{ gäller: } |a_j - a_2| < 10^{-2}$$

$$a_4 - a_3 = 3.1415 - 3.141 = 0.0005$$

$$a_5 - a_3 = 3.14159 - 3.141 = 0.00059$$

...

$$\text{För alla } j \geq 3 \text{ gäller: } |a_j - a_3| < 10^{-3}$$

(12)

Allmänt: För alla $j \geq i$ gäller:

$$|a_j - a_i| < 10^{-i}$$

" Skillnaden mellan a_j och a_i kan
fås godtyckligt liten, bara vi
väljer i tillräckligt stort,
och $j \geq i$ "

Formell definition. (Cauchy-följd)

En talföljd $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

kallas Cauchy-följd, om för varje

tal $\varepsilon > 0$ finns ett naturligt tal N ,

sådant att

$$i, j \geq N \Rightarrow |a_j - a_i| < \varepsilon.$$

(13)

OBS!

Varje Cauchy-följd av rationella tal:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

genererar en decimalutveckling,
och kan därmed sägas representera
ett icke heltal $\bar{a} = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$.

Vi kan alltid få $|a_j - a_i| < \underbrace{\varepsilon}_{-(n+1)}$

(där n kan vara ett godtyckligt
stort heltal) bara vi väljer

$i, j \geq N$ för ett tillräckligt stort N .

Men detta innebär att alla tal a_j
i följden, med $j \geq N$, överensstämmer
i de n första decimalerna (deras
skillnad är maximalt 1 i position $n+1$).

(14)

Sammanfattning

Reellt tal

=

Decimalutveckling

=

Cauchy-följd

(15)

Vi är nu redo att bevisa Bolzanos sats:

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$,
och om $f(a)$ och $f(b)$ har olika
tecken, så finns ett tal $\bar{x}$ i $[a, b]$
sådant att $f(\bar{x}) = 0$.

Vi studerar först det konkreta exemplet
 $f(x) = x^2 - 2$ på intervallet $[1, 2]$.

Notera: $f(1) = -1 < 0$

$$f(2) = 2 > 0$$

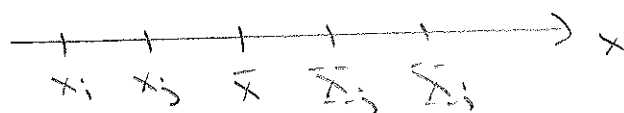
Vi använder bisektionsalgoritmen
och konstruerar två följder
 $\{x_i\}$ och $\{\bar{x}_i\}$ av rationella tal,
där $[x_i, \bar{x}_i]$ är det aktuella
intervallet efter i bisektioner
(intervallhalveringar).

i	x_i	X_i

0	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	1.0000000000000000	1.5000000000000000
2	1.2500000000000000	1.5000000000000000
3	1.3750000000000000	1.5000000000000000
4	1.3750000000000000	1.4375000000000000
5	1.4062500000000000	1.4375000000000000
6	1.4062500000000000	1.4218750000000000
7	1.4140625000000000	1.4218750000000000
8	1.4140625000000000	1.4179687500000000
9	1.4140625000000000	1.4160156250000000
10	1.4140625000000000	1.4150390625000000
11	1.4140625000000000	1.4145507812500000
12	1.4140625000000000	1.4143066406250000
13	1.4141845703125000	1.4143066406250000
14	1.4141845703125000	1.4142456054687500
15	1.4141845703125000	1.4142150878906250
16	1.4141998291015625	1.4142150878906250
17	1.414207458496094	1.4142150878906250
18	1.414211273193359	1.4142150878906250
19	1.414213180541992	1.4142150878906250
20	1.414213180541992	1.414214134216309

Notera: För $j \geq i$ gäller:

$$x_i \leq x_j \leq \bar{x} \leq \bar{x}_j \leq \bar{x}_i$$



$$|x_i - \bar{x}_i| = \frac{1}{2^i} = 2^{-i} \quad (i)$$

$$|x_i - x_j| \leq 2^{-i} \quad (ii)$$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leq 2^{-i} \quad (iii)$$

(57)

(ii) och (iii) innebär att $\{x_i\}$ och $\{\bar{x}_i\}$ är Cauchy-följder, och vi har alltså två decimalutvecklingar:

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1.41421356 \dots$$

$$\bar{\bar{x}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{x}_i = 1.41421356 \dots$$

(i) innebär att decimalutvecklingarna är lika:

$$\bar{x} = \bar{\bar{x}} = 1.41421356 \dots$$

Vi ger decimalutvecklingen vi konstruerat namnet $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \bar{x} = \bar{\bar{x}} = 1.41421356 \dots$$

18

Vi vill nu visa att den decimal-
utveckling vi konstruerat löser
ekvationen, d.v.s. att

$$\begin{aligned}(\bar{x})^2 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\&= (1.41421356\dots) \cdot (1.41421356\dots) \\&= 2\end{aligned}$$

Vad menas med $(\bar{x})^2$?

Jo, vi betraktar följden

$$\{x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots\}$$

Eftersom x^2 är Lipschitz-kontinuerlig
på intervallet $[1, 2]$ med Lipschitz-
konstant $L=4$ får vi för $j \geq i$:

$$|x_i^2 - x_j^2| \leq 4 |x_i - x_j| \leq 4 \cdot 2^{-i}$$

Därmed är $\{x_i^2\}$ också en Cauchy-följd.

(19)

Vi definierar:

$$(\bar{X})^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i^2$$

Vi måste alltså visa att

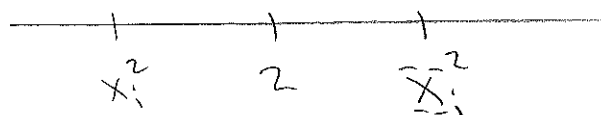
$$(\bar{X})^2 - 2 = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i^2 - 2 = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(X_i) = 0$$

Notera: $f(x_i) < 0$ för alla i
 $f(\bar{x}_i) > 0$ -11-

$$x_i^2 < 2 < \bar{x}_i^2$$



$$|x_i^2 - 2| \leq |\bar{x}_i^2 - x_i^2| \leq 4|\bar{x}_i - x_i|$$

$$= 4 \cdot 2^{-i} \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty.$$

☺

(20)

Vi har därmed visat att den
följd $\{x_i\}$ som vi konstruerat
med bisektionsalgoritmen
är en Cauchy-följd, och att
decimalutvecklingen

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

löser ekvationen.

På detta sätt kan vi alltså
genom beräkning (med bra
algoritmer!) konstruera
lösningar till ekvationer.

(21)

Vi frågar oss slutligen om
det kan finnas ytterligare
någon lösning $\bar{y}$ till ekvationen
på intervallet $[1, 2]$?

Eftersom $f(x) = x^2 - 2$ är strängt
växande på $[0, \infty)$:

$$0 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) < f(-1)$$

$$\begin{aligned} \text{t.v. } f(-1) - f(x) &= (-1)^2 - x^2 \\ &= (-1 - x)(-1 + x) > 0 \end{aligned}$$

är $\bar{x}$ entydig.

$$f(\bar{x}) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{x} = -1.$$