

①

BM4 : Bevis av Bolzanos sats

BM5 : Fixpunktsiteration

Vi skall nu bevisa Bolzanos sats:

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$,
och om $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken,
så finns ett tal $\bar{x}$ i $[a, b]$ sådant
att $f(\bar{x}) = 0$. Om f är strängt monotont
(växande eller avtagande), så är lösn. $\bar{x}$ entydig.

Vi kommer att genomföra beviset
under det extra antagandet att f
är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, b]$.

Beviset, som är precis analogt med
det vi gjorde i specialfallet $f(x) = x^2 - 2$,
är organiserat i följande fyra steg:

(2)

1. en algoritm (bisektionsalgoritmen)
som genererar en approximerande
följd $\{x_i\}$
2. ett bevis av att $\{x_i\}$ är en
Cauchy-följd, så att vi erhåller
ett reellt tal (decimalutveckling)
$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$
3. ett bevis av att $\bar{x}$ löser ekv.:
$$\{f(x_i)\}$$
 är också en Cauchy-följd
och
$$f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$$
4. ett bevis av att lösningen $\bar{x}$
är entydig (om f är en
strängt monoton funktion)

(3)

Bevis.

1. Vi använder bisektionsalgoritmen med startvärden a och b .

2. Vi erhåller två följder $\{x_i\}$ och $\{\bar{x}_i\}$ med:

$$i) \quad |x_i - \bar{x}_i| = \frac{b-a}{2^i}, \quad i=0,1,2,\dots$$

$$ii) \quad |x_i - x_j| \leq \frac{b-a}{2^i}, \quad \text{för } j \geq i$$

$$iii) \quad |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leq \frac{b-a}{2^i}, \quad \text{---}$$

Olikheterna ii) och iii) visar att $\{x_i\}$ och $\{\bar{x}_i\}$ är Cauchy-följder:

$$|x_i - x_j| \rightarrow 0, \quad \text{så } i, j \rightarrow \infty$$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \rightarrow 0, \quad \text{---}$$

Vi erhåller därmed decimalutvecklingar (reella tal):

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \quad \text{och} \quad \overline{\bar{x}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{x}_i$$

Enligt i) så är $\bar{x} = \overline{\bar{x}}$.

(4)

3. Lipschitz-kontinuiteten hos f ger:

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq L |x_i - x_j| \leq L \cdot \frac{b-a}{2^i}, \quad j \geq i$$

Alltså är $\{f(x_i)\}$ också en Cauchy-följd:

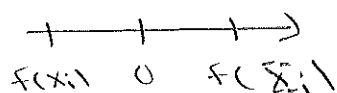
$$|f(x_i) - f(x_j)| \rightarrow 0, \quad \text{då } i, j \rightarrow \infty$$

Vi får alltså en decimalutveckling (reellt tal) som vi betecknar $f(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i)$$

Vi måste visa att $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$.

Men eftersom $f(x_i)$ och $f(\bar{x}_i)$ har olika tecken får vi:



$$|f(x_i)| = |f(x_i) - 0|$$

$$\leq |f(x_i) - f(\bar{x}_i)|$$

$$\leq L |x_i - \bar{x}_i|$$

$$= L \cdot \frac{b-a}{2^i} \rightarrow 0, \quad \text{då } i \rightarrow \infty.$$

$$\text{Alltså: } f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0.$$

5)

4. Antag att f är strängt växande
(strängt avtagande behandlas analogt):

$$x < -1 \Rightarrow f(x) < f(-1)$$

Om vi har två olika lösningar

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2$$

med

$$f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = 0$$

motsäger detta antagandet om
(strängt) monotonicitet.

Alltså finns bara en (enständig)
lösning.



(6)

Satsen om mellanliggande värden
följer nu direkt:

Sats. Om $f(x)$ är kontinuerlig
på $[a, b]$, och om y är
ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$,
så finns ett tal $\bar{x}$ i $[a, b]$
sådant att $f(\bar{x}) = y$.

Bevis: Sätt $F(x) = f(x) - y$

$$\text{Då har } F(a) = f(a) - y$$

$$F(b) = f(b) - y$$

olika tecken.

Enligt Bolzano finns $\bar{x}$ i $[a, b]$
sådant att $F(\bar{x}) = 0$.

$$\text{Men } F(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = y.$$

Kommentar.

Om f är strikt monoton så är F det
också och lösningen $\bar{x}$ är entydig.

⑦

BMS Fixpunktsiteration

Vi har betraktat ekvationer på formen $f(x) = 0$.

Vi skall nu betrakta ekvationer på formen $x = g(x)$.

Detta kallas för en fixpunkts-
ekvation. En lösning $\bar{x}$ kallas för
en fixpunkt till g .

Exempel.

Ekvationen $f(x) = x^2 - 2 = 0$ kan
skrivas om som en (ekvivalent)
fixpunkts ekvation på flera sätt:

$$x = g_1(x) = \frac{2}{x}$$

$$x = g_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad (2x^2 = x^2 + 2)$$

$$x = g_3(x) = x + \alpha (x^2 - 2)$$

↑
godtyckligt tal α
el. funktion $\neq 0$ $f(x)$

8

Fixpunktsiteration är en algoritm

för att lösa fixpunktsekvationer:

- Välj en startpunkt x_0
- Beräkna $x_i = g(x_{i-1})$, $i=1,2,3,\dots$

Exempel.

Med $x_0 = 1$ och $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ fås:

$$x_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1.5}{2} + \frac{1}{1.5} = 1.4166\dots$$

$$x_3 = 1.414215\dots$$

$$x_4 = 1.414213\dots$$

1 MATLAB:

$$>> x = 1$$

$$>> x = x/2 + 1/x$$

$$>> x = x/2 + 1/x$$

$$>> x = x/2 + 1/x$$

9

Exempel.

Med $x_0 = 1$ och $g(x) = \frac{2}{x}$ fås:

$$x_1 = \frac{2}{x_0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{2}{x_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_4 = \frac{2}{x_3} = \frac{2}{2} = 1$$



OBS! Fixpunktsiteration konvergerar
inte alltid.

Vi skall på fredag bevisa följande
sats som talar om vad som krävs
för att följden $\{x_i\}$ skall konvergera.

(10)

Kontraktionsavbildningssatsen.

Antag att I är ett slutet intervall
($I = [a, b]$ eller $I = [a, \infty)$ eller $I = (-\infty, b]$)

och att $g: I \rightarrow I$ är Lipschitz-
kontinuerlig, med Lipschitz-konstant
 $L < 1$.

Då har g en entydig fixpunkt $\bar{x} \in I$:

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

Fixpunkten fås genom fixpunkts-
iteration: $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, där

$$x_i = g(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

och $x_0 \in I$ är ett godtyckligt
startvärde.

(11)

Kommentarer:

1. $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$, där $L < 1$

innebär att avståndet mellan $g(x)$ och $g(y)$ är mindre än avståndet mellan x och y .

g kallas en kontraktionsavbildning

(eller bara en kontraktion)

2. Det är viktigt att $g: I \rightarrow I$

d.v.s.

$$g(x) \in I \text{ för } x \in I$$

så att följden $\{x_i\}$ inte

"hoppas ut" intervallet I

där g är en kontraktion.

(12)

Exercise.

$$X = g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\text{Tag } I = [1, 2]$$

För $x, y \in I$ fås:

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{y} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy} \right| = \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right) (x-y) \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right|}_{\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]} |x-y|$$

$$\leq \frac{1}{2} |x-y|$$

$$\underline{L = \frac{1}{2}}$$

$$x \in [1, 2] \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Alltså: } g(x) \in [1, 2]$$