

①

Kontraktionsavbildningssatsen (Forts.)

Kom ihåg:

Formulering:

Antag att I är ett slutet intervall
och att $g: I \rightarrow I$ är en kontraktions-
avbildning.

Då har g en entydig fixpunkt $\bar{x} \in I$:

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

Fixpunkten fås som gränsvärdet:

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

Är talföljden $\{x_i\}$ ges av fixpunkts-
iteration:

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$\vdots$

Är $x_0 \in I$ är en godtycklig startpunkt.

(2)

Bevis:

Första gången:

Steg 1. Välj godtycklig startpunkt $x_0 \in I$.

Använd fixpunktsiteration:

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$\vdots$

Steg 2. Bevis av att $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd.

Vi visade första gången att

$$|x_i - x_j| \rightarrow 0, \text{ då } i, j \rightarrow \infty$$

s.v.s. $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd.

Vi erhåller därmed en decimalutveckling (reellt tal):

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

där $\bar{x} \in I$ eftersom I är slutet.

(3)

Steg 3. Bevis av att $\bar{x}$ är en fixpunkt.

Följden $\{g(x_i)\}$ är också en Cauchy-följd:

$$|g(x_i) - g(x_j)| \leq L |x_i - x_j| \rightarrow 0, \text{ då } i, j \rightarrow \infty$$

↑
g Lipschitz-kontinuerlig

Därmed fås en decimalutveckling (reellt tal) som vi betecknar $g(\bar{x})$:

$$g(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i)$$

Vi måste visa att $\lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i) = \bar{x}$.

Men detta följer eftersom

$$|\bar{x} - g(x_i)| = |\bar{x} - x_{i+1}| \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty.$$

$$\text{Alltså: } g(\bar{x}) = \bar{x}$$

(4)

Steg 4. Bevis av entydighet.

Antag att det finns två fixpunkter

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in I:$$

$$\bar{x}_1 = g(\bar{x}_1)$$

$$\bar{x}_2 = g(\bar{x}_2)$$

Men då gäller:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |g(\bar{x}_1) - g(\bar{x}_2)|$$

$$\leq L |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

Så $L < 1$.

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - L |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq 0$$

$$(1 - L) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq 0$$

$$\underbrace{\quad}_{>0}$$

$$\text{Alltså: } |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 0$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$$



⑤

Kommentar.

Vi använde i MATLAB stoppkriteriet:

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \text{tol}$$

Det går att visa (BM5, sid. 5)
att för felet $x_i - \bar{x}$ så gäller:

$$|x_i - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-L} |x_i - x_{i+1}| \leq \frac{\text{tol}}{1-L}$$

Notera: Om L är nära 1, så kan felet vara mycket större än tol , och vi får färre korrekta decimaler än vad tol på egen hand indikerar.

⑥

Konvergenzhastighet

Felet minskar med faktorn $L < 1$
i varje steg:

$$\begin{aligned} |x_i - \bar{x}| &= |g(x_{i-1}) - g(\bar{x})| \\ &\leq L |x_{i-1} - \bar{x}| \end{aligned}$$

fel efter
i steg

↑
fel efter
i-1 steg

Ju mindre L är, ju snabbare konvergens.

Detta kallas linjär konvergens.

Exempel.

Om $L = \frac{1}{2}$ minskar felet med en
faktor $\frac{1}{2}$ i varje steg.

(Samma som för bisektionsalgoritmen.)

(7)

Fixpunktsiteration kan ibland konvergera snabbare än linjärt.

Exempel.

För $x = g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ gör det
att visa att:

$$|x_i - \bar{x}| \leq K |x_{i-1} - \bar{x}|^2$$

$\uparrow$
 $= \sqrt{2}$

Detta kallas kvadratisk konvergens.

Felet minskar med en faktor som
är proportionell mot felet självt.

Konvergensthastigheten ökar då x_i
närmar sig $\bar{x}$.

Vi skall längre fram i BM6

(Newtons metod) lära oss varför
konvergensten blir så snabb i detta fall.

8

En annan fördel med fixpunktsiteration jämfört med bisektionsalgoritmen

(som alltid konvergerar linjärt)

är att fixpunktsiteration också

fungerar för system av ekvationer.

En nackdel med fixpunktsiteration

är att det kan vara svårt att

hitta ett intervall I där iterationen

konvergerar. Detta är enklaste med

bisektionsalgoritmen: Välj bara

$I = [a, b]$ s.a. $f(a)$ och $f(b)$ har

olika tecken.

9

Adams 2.1

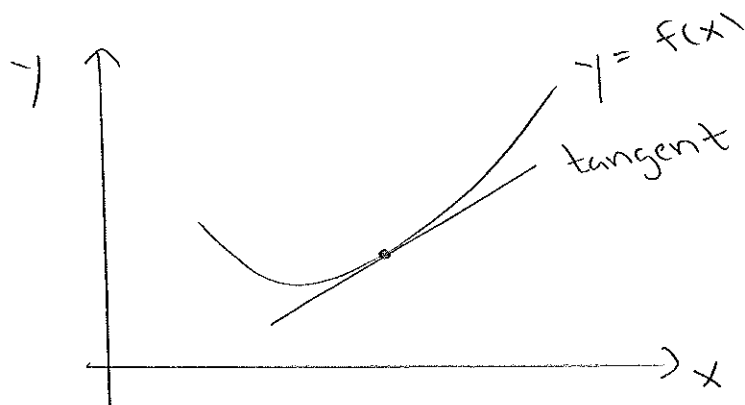
Tangentlinjer och zeros lutning

Ett grundläggande problem i

Differentialkalkyl är att

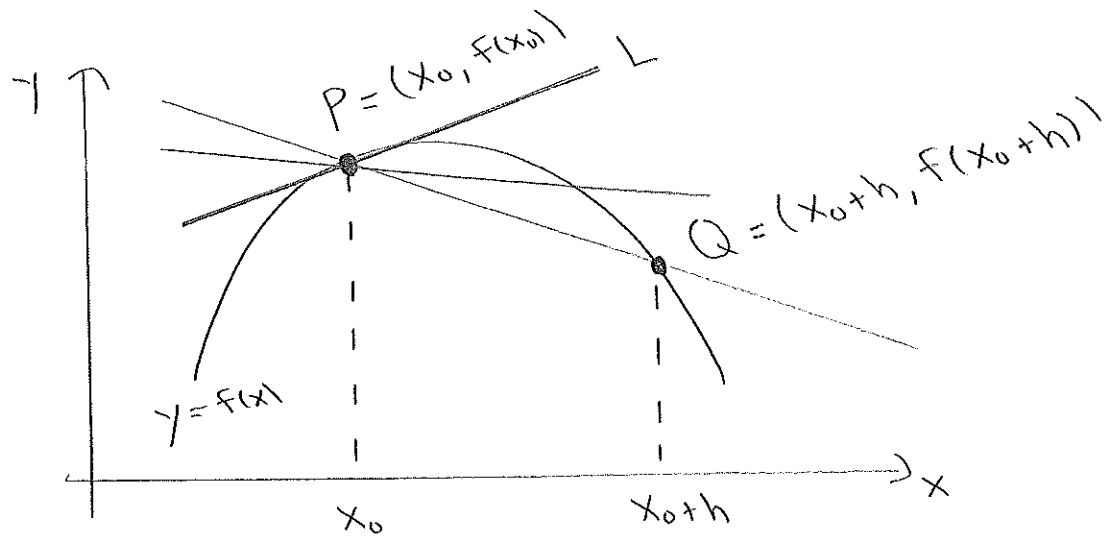
bestämma lutningen (tangenten)

till en given kurva i en given
punkt på kurvan.



(10)

Tangentens lutning ges av ett gränsvärde:



$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{lutning hos sekanten PQ}}$$

lutning
hos
tangenten
L

Tangentens ekvation:

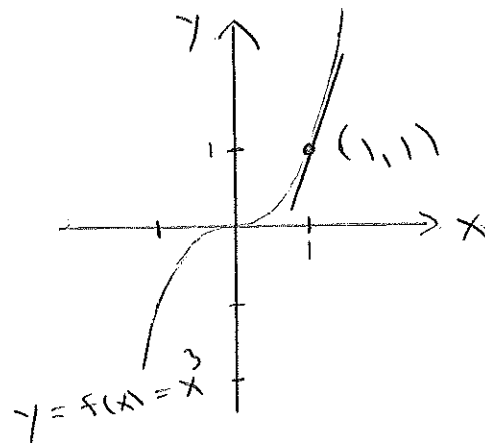
$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

m kallas också kurvans lutning i punkten P .

11

Exempel.

Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x) = x^3$ i punkten $(1, 1)$.



$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + 3h + 3h^2 + h^3 - \cancel{1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tangentens ekv. : $y = 3(x-1) + 1$
 $= 3x - 2$

(12)

Exempel.

Bestäm lutningen till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x}{x-2} \quad \text{i punkten } (4, 2).$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4+h}{2+h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h - 2(2+h)}{(2+h)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(2+h)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h}$$

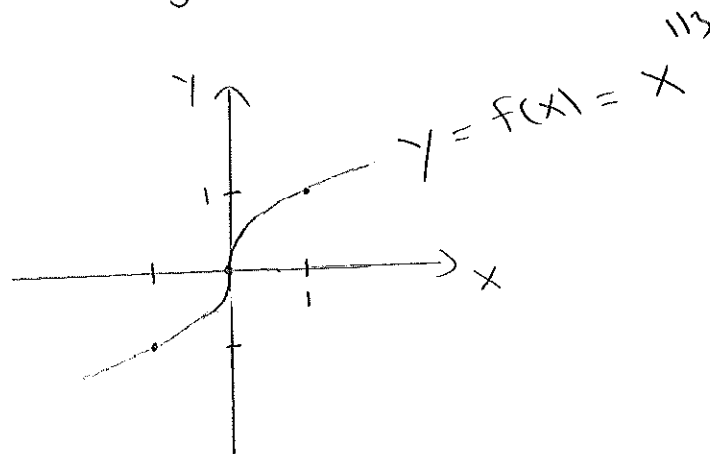
$$= -\frac{1}{2}$$

13

Exempel.

För kurvan $y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

fås i origo:



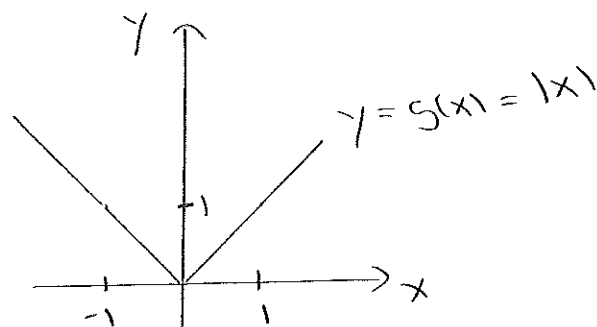
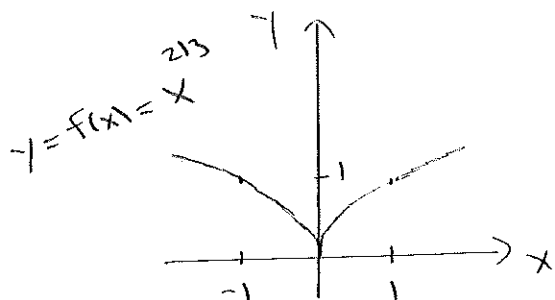
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Vertikal tangent (y-axeln)

(14)

Exempel.

Kurvorna $y = f(x) = x^{2/3}$ och $y = g(x) = |x|$ saknar tangent i origo.



$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty$$

Olika vänster- och högergränsvärden.

" 180 graders sväng i origo "

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

" 90 graders sväng i origo "

(15)

Åkums 2.2-2.6

Derivata

I en punkt x där kurvan $y = f(x)$

har ändlig lutning (ej vertikal tangent)

säges funktionen $f(x)$ vara deriverbar,

med derivatan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\Delta y}}{\underbrace{h}_{\Delta x}}$$

f' är också en funktion.

$f'(x)$ är kurvans lutning i punkten x .

Alternativ beteckning:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

16

Olika sätt att beteckna derivatan

till $y = f(x)$:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = f'(x) = D_x y = D_x f(x)$$

Derivatans värde i en punkt x_0

betecknas:

$$\begin{aligned} y' \Big|_{x=x_0} &= \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial x} f(x) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \\ &= D_x y \Big|_{x=x_0} = D_x f(x_0) \end{aligned}$$

Exempel.

$$\frac{\partial}{\partial x} x^3 \Big|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 12$$

17

Derivator beräknas i allmänhet
inte direkt ur definitionen, utan
vi utnyttjar standardderivator
och derivationsregler.

Standardderivator

$f(x)$	$f'(x)$	
$ax + b$	a	rät linje med lutning a horisontell linje
c	0	
x^r	$r x^{r-1}$	
$ x $	$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{ x } = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	
$\sin x$	$\cos x$	om x mäts i radianer
$\cos x$	$-\sin x$	

(18)

Derivierungsregeln

$$1. \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$2. \quad (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$3. \quad (kf)'(x) = k f'(x) \quad (k = \text{konstant})$$

$$4. \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{produkt-} \\ \text{regeln})$$

$$5. \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (\text{quot-} \\ \text{regeln})$$

$$6. \quad \frac{d}{dx} (f(g(x))) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Äußere} \\ \text{Derivative}}}{f'(g(x))}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interne} \\ \text{Derivative}}}{g'(x)} \quad (\text{Kette-} \\ \text{regeln})$$

19.

Bevis.

1 morgon.

Samtliga standardderivator
och deriveringsregler följer
ur gränsvärdesdefinitionen
av derivator.

Exempel.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{x} \\ &= 2x^3 + 3x^{1/2} - 4x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} \\ &= 6x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

(20)

Exempel.

$$f(x) = (3x+1)(x^2-1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (x^2-1) + (3x+1) \cdot 2x \\ &= 9x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Alt. : } f(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2x - 3$$

Exempel.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(21.)

Exempel.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

Exempel.

$$f(x) = \sin(2x + 1)$$

$$f'(x) = \cos(2x + 1) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 2 \cos(2x + 1)$$

Exempel.

$$f(x) = \sqrt{2 + (x^2 + 1)^3} = (2 + (x^2 + 1)^3)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2 + (x^2 + 1)^3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(2 + (x^2 + 1)^3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2 + (x^2 + 1)^3}} \cdot (0 + 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x)$$

$$= \frac{3x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{2 + (x^2 + 1)^3}}$$

(22)

Höhere ordnungens derivator

Exempel.

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 36x^2$$

andera-derivatan

$$f^{(3)}(x) = 60x^2 + 72x$$

trede-derivatan

$$f^{(4)}(x) = 120x + 72$$

...

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = 0$$

...

(23)

Alternativ beteckningar.

$$y'' = f''(x) = \frac{2-1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} f(x) = D_x^2 y = D_x^2 f(x)$$

⋮

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{1}{2x^n} = \frac{1}{2x^n} f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x)$$

Exempel.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot \frac{1}{2x} (1-x) = (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1)$$

$$f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1)^2$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1)^3$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-n) \cdot (1-x)^{-n-1} \cdot (-1)^n$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (1-x)^{-n-1}$$

$$= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

"n faktoriell"
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$