

①

Medelvärdessatsen

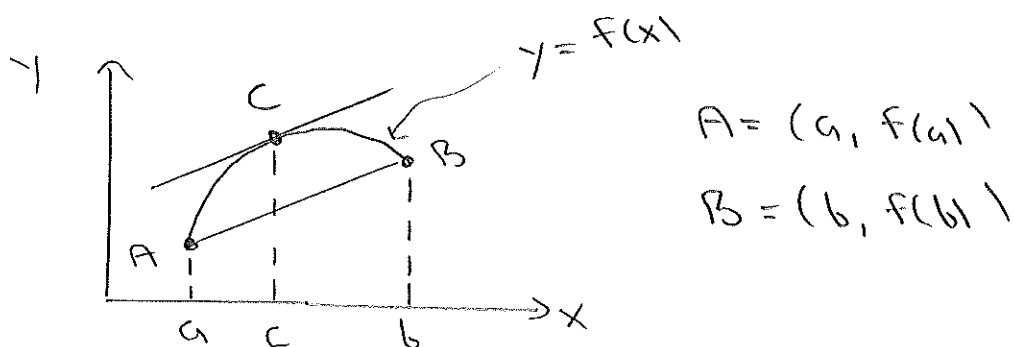
Sats (Medelvärdessatsen)

Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a, b) .

Då finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Geometrisk tolkning:



Det finns ett tal $c \in (a, b)$ där tangenten har samma lutning som kordan AB.

②

Vi bevisar Medelvärdessatsen på fredag.

Vi skall först betrakta några olika tillämpningar:

- olikheter
- växande och avtagande funktioner
- linjär approximation
- numerisk derivata

↑
Laborövning
torsdag

③

Exempel. (Olikheter)

Visa att $\sin x < x$ för alla $x > 0$.

För $x > 2\pi$ följer olikheten direkt ur

$$\sin x \leq 1 < 2\pi < x$$

Antag att $0 < x \leq 2\pi$.

Eftersom $f(x) = \sin x$ är kontinuerlig på $[0, x]$ och deriverbar på $(0, x)$

ger medelvärdessatsen:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad \text{för något tal } c \in (0, x)$$

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(c) < 1$$

$$\text{t, } 0 < c < x \leq 2\pi$$

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1$$

$$\sin(x) < x \quad (x > 0)$$

④

Växande och avtagande funktioner

Definition.

Antag att funktionen f är definierad på ett intervall I , och att $x_1, x_2 \in I$.

(a) Om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

säges f vara strängt växande på I .

(b) Om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

säges f vara strängt avtagande på I .

(c) Om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

säges f vara växande på I .

(d) Om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

säges f vara avtagande på I .

(5)

Sats.

Låt J vara ett öppet intervall,
och I vara det slutna intervall som fås
om vi till J lägger till (ev.) ändpunkter.

$$J: (a, b) \text{ el. } (-\infty, b) \text{ el. } (a, \infty) \text{ el. } (-\infty, \infty)$$

$$I: [a, b] \text{ el. } (-\infty, b] \text{ el. } [a, \infty) \text{ el. } (-\infty, \infty)$$

Antag att f är kontinuerlig på I
och deriverbar på J .

- (a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ strängt växande på I
- (b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ strängt avtagande på I
- (c) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ växande på I
- (d) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ avtagande på I

Bevis. Låt $x_1, x_2 \in I$ och $x_1 < x_2$.

Enligt medelvärdessatsen existerar ett
 $c \in (x_1, x_2) \subset J$ sådant att:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

(6)

$$(g) \quad f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$(h) \quad f'(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$(i) \quad f'(c) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(j) \quad f'(c) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

□

⑦

Exempel.

Bestäm på vilka intervall funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \quad \text{är strängt växande}$$

resp. strängt avtagande.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{då} \quad x > 1 \quad \text{eller} \quad x < -1.$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{då} \quad -1 < x < 1$$

Därmed gäller:

f är strängt växande på $(-\infty, -1]$
och på $[1, \infty)$.

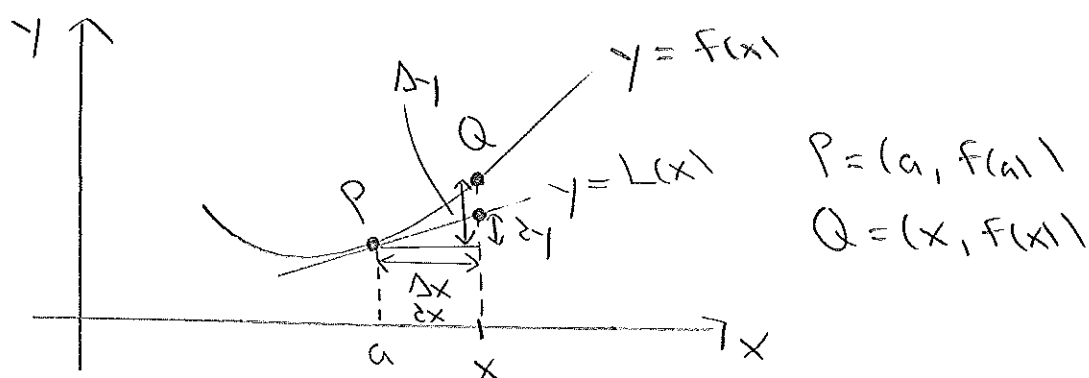
f är strängt avtagande på $[-1, 1]$.

(8)

Linjär approximation (Adams 4.9)

(4.7 i 6:e upplagan)

Geometriskt innebär linjär approximation att approximera en kurva med sin tangent:



linjarisering

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Kommentar. Vi kan skriva:

$$\Delta y = f'(a) \Delta x$$

Här är Δx och Δy ändliga storheter, vilka kallas differentialer.

$$\Delta y = f(x) - f(a) \approx \Delta y$$

9)

Exempel.

Linjarisera $f(x) = \sqrt{x}$ kring $x = 25$

för att beräkna en approximation till $\sqrt{26}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{26} = f(26) \approx L(26)$$

$$= f(25) + f'(25) \cdot (26 - 25)$$

$$= \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 1$$

$$= 5 + \frac{1}{10}$$

$$= 5.1$$

Med miniräknare: $\sqrt{26} = 5.099 \dots$

(10)

Hur stort blir felet $E(x) = F(x) - L(x)$?

För att kunna uppskatta storleken av $E(x)$ behöver vi följande generalisering av Medelvärdessatsen:

Sats. Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b) .

Om $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$, så finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Kommentar.

- Med $g(x) = x$ fås "vanliga" medelvärdessatsen.
- $g(b) \neq g(a)$, ty annars skulle det enligt "vanliga" medelvärdessatsen finnas ett tal $c \in (a, b)$ s.a. $g'(c) = 0$.

(11)

Bewis.

Sätt

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) \\ - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

h är kontinuerlig på $[a, b]$ och
deriverbar på (a, b) , eftersom både f och g
är det.

$$h(a) = h(b) = 0$$

Medelvärdessatsen ger att det finns
ett tal $c \in (a, b)$ s.a.

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c)$$

$$h'(c) = 0$$

$$\text{Men: } h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

(12)

Sats. (Uppskattning av felet i linjär approximation)

Antag att $f''(t)$ existerar för alla t i ett intervall som innehåller a och x .

Då finns ett tal s mellan a och x ,
sådant att för felet $E(x) = f(x) - L(x)$
i den linjära approximationen

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

så gäller:

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (x-a)^2$$

Bevis.

Vi antar att $x > a$. (Fallet $x < a$ analogt.)

$$E(t) = f(t) - L(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$$

$$E'(t) = f'(t) - f'(a)$$

Vi använder nu den generaliserade medelvärdes-
satsen, med funktionerna $E(t)$ och $(t-a)^2$
på intervallet $[a, x]$:

(13)

Det finns ett tal $u \in (a, x)$ s.a. :

$$\frac{E(x) - \overbrace{E(a)}^{=0}}{\underbrace{(x-a)^2 - (a-a)^2}_{=0}} = \frac{E'(u)}{2(u-a)}$$

$$\frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(u) - f'(a)}{u-a}$$

$$\nearrow = \frac{1}{2} \cdot f''(s)$$

Medelvärdes-
satsen

för något
tal $s \in (a, u)$

$$E(x) = \frac{1}{2} f''(s) (x-a)^2$$

□

(14)

Exempel.

$$\text{Må } f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

fås för felet i linjariseringen kring 25:

$$E(26) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (26-25)^2$$

$$= \frac{f''(s)}{2}$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s^{3/2}}$$

för något $s \in (25, 26)$

$$\text{Alltså: } |E(26)| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5^3} = 0.001$$