

①

Sats

Om f är deriverbar i punkten x ,
så är f kontinuerlig i x .

Bevis

Vi måste visa att $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

Vi vet att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

existerar.

Därmed fås:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \right) \\ &= f'(x) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

enligt räkneregler för gränsvärden
(Sats 2 i avsnitt 1.2)

□

(2)

Antag $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar.

Beweis av produktregeln

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

där vi använt räkeregler för gränsvärden,
samt att g är kontinuerlig i x
(eftersom g' existerar).

□

③

Härledning av derivator för sin och cos

$$\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

additionsformeln för sinus

$$\downarrow = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cosh - 1) + \cos x \sinh}{h}$$

$$= \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h}}_{=0} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}}_{=1}$$

vi visar detta
strax!

$$= \cos x.$$

□

(4)

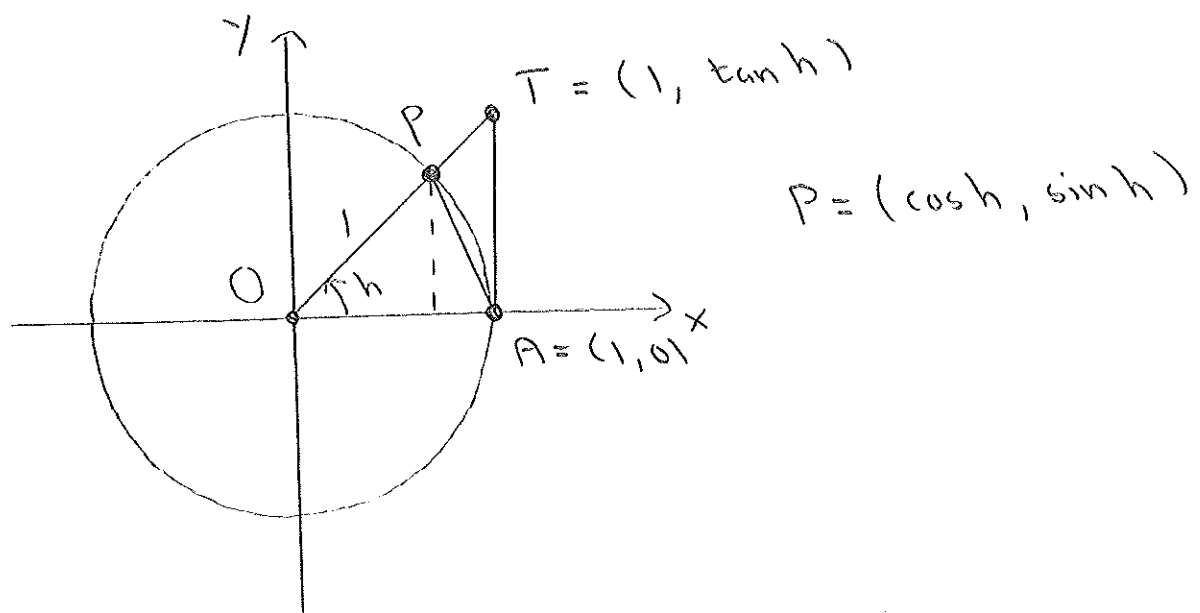
Det går att härleda derivatan
för $\cos x$ analogt, men det är
enklaste att använda kedjeregeln:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cos x &= \frac{d}{dx} \sin \left(\overbrace{\frac{\pi}{2} - x}^{\text{komplementvinkel till } x} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

□

5

Bevis av att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1.$



Antag $0 < h < \frac{\pi}{2}$ (se figur)

area $\triangle OAP <$ area cirkelsektor $OAP <$ area $\triangle OAT$

$$\frac{1 \cdot \sinh h}{2} < \frac{h}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1 \cdot \tanh h}{2}$$

$$\frac{\sinh h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\sinh h}{2 \cosh h}$$

$$1 < \frac{h}{\sinh h} < \frac{1}{\cosh h}$$

$$1 > \frac{\sinh h}{h} > \cosh h \rightarrow 1, \text{ då } h \rightarrow 0^+$$

Instängningsregeln för gränsvärden ger nu

$$\text{att } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sinh h}{h} = 1$$

(6)

Eftersom $\sin h$ är en udda funktion fås:

$$\frac{\sin(-h)}{(-h)} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$$

Därmed fås:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Alltså:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

□

⑦

Bevis av att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2 \cdot \frac{h}{2}) - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\frac{h}{2}) - \sin^2(\frac{h}{2}) - \left\{ \cos^2(\frac{h}{2}) + \sin^2(\frac{h}{2}) \right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{2 \sin^2(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \sin(\frac{h}{2})$$

$$= -1 \cdot 0$$

$$= 0$$

□

(4)

Kommentar.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

gäller endast om x mäts i radianer.

Om x mäts i grader förs:

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\overbrace{\frac{\pi}{180} \cdot x}^{\text{radianer}}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\pi}{180} \cdot \cos(x^\circ)$$

Analogt förs:

$$\frac{d}{dx} \cos(x^\circ) = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin(x^\circ)$$

9)

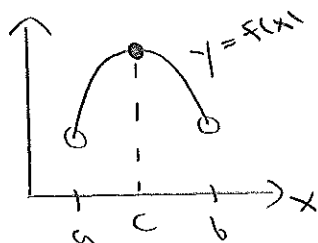
Vi skall nu bevisa Medelvärdessatsen.

Vi gör detta i tre steg.

Steg 1

Sats. Antag att f är definierad på det öppna intervallet (a, b) och att f antar sitt största (eller minsta) värde i punkten $c \in (a, b)$. Om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$.

Bevis. Antag att f antar sitt största värde i c :



$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{Antag } a < x < c: \quad f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \overbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}^{\leq 0} \geq 0$$

$$\text{Antag } c < x < b: \quad f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \overbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}^{\leq 0} \leq 0$$

$$\text{Alltså: } f'(c) = 0.$$

Fallet med minsta värde behandlas analogt.

□

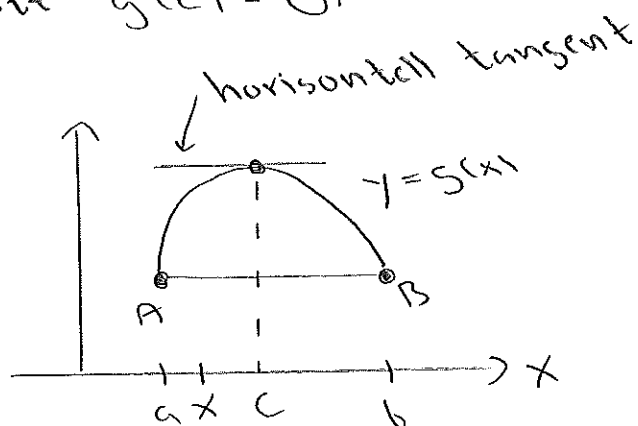
(10)

Steg 2Rolles sats.

Antag att g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) .

Om $g(a) = g(b)$ så existerar ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $g'(c) = 0$.

Bevis.



Om $g(a) = g(x) = g(b)$ för alla $x \in [a, b]$ så är g konstant, och $g'(c) = 0$ i alla punkter $c \in (a, b)$.

Antag därför att det finns ett tal $x \in (a, b)$ sådant att $g(x) \neq g(a)$.

Vi antar att $g(x) > g(a)$. (Fallet $g(x) < g(a)$ behandlas analogt)

Enligt satsen om största och minsta värde för kontinuerliga funktioner (Theorem 8 i avsnitt 1.4) antar g ett största värde i någon punkt $c \in [a, b]$:

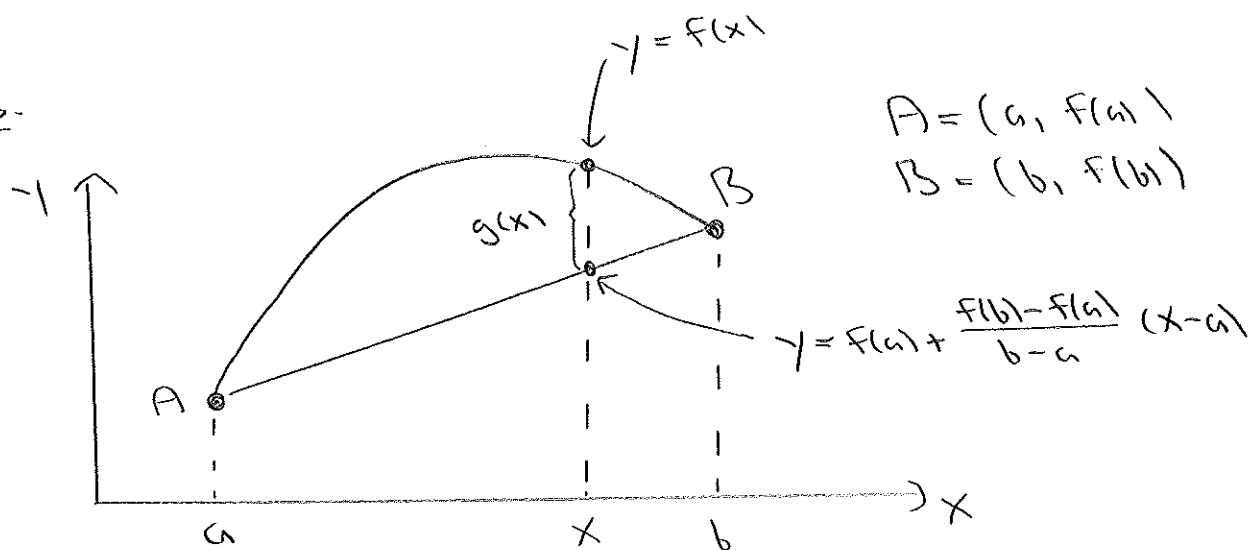
$$g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b) \Rightarrow c \in (a, b) \\ \Rightarrow g'(c) \text{ existerar} \stackrel{\text{steg 1}}{\Rightarrow} g'(c) = 0 \quad \square$$

(11)

Steg 3Medelvärdessatsen

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då existerar ett tal $c \in (a, b)$, sådant att:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bewis.

Vi definierar:

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right\}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

• g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) eftersom f är det.

• $g(a) = g(b) = 0$

Rolles sats ger att det finns ett tal $c \in (a, b)$

s.a. $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

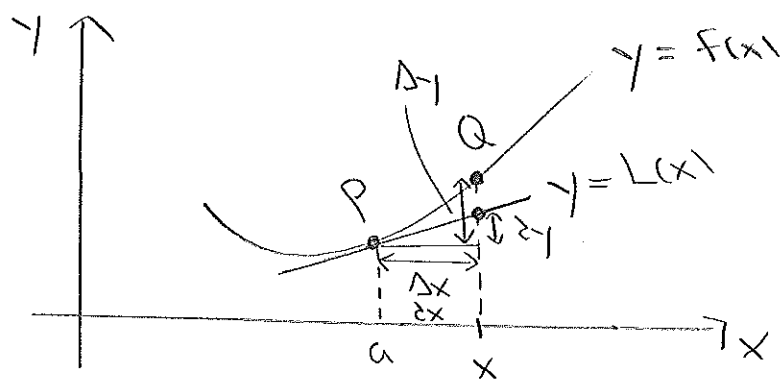
□

(12)

Linjär approximation (Adams 4.9)

(4.7 i 6:e upplagan)

Geometriskt innebär linjär approximation att approximera en kurva med sin tangent:



$$P = (a, f(a))$$

$$Q = (x, f(x))$$

$$\Delta x = \Delta x = x - a$$

$$\Delta y = f(x) - f(a)$$

$$\Delta y = L(x) - f(a)$$

linjärisering

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Vi kan skriva:

$$\Delta y = f'(a) \Delta x$$

Här är Δx och Δy ändliga storheter, vilka kallas differentialer.

$$\Delta y = f(x) - f(a) \approx \Delta y = L(x) - f(a)$$

(13)

Exempel.

Linjärisera $f(x) = \sqrt{x}$ kring $x = 25$

för att beräkna en approximation till $\sqrt{26}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{26} = f(26) \approx L(26)$$

$$= f(25) + f'(25) \cdot (26 - 25)$$

$$= \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 1$$

$$= 5 + \frac{1}{10}$$

$$= 5.1$$

Med miniräknare: $\sqrt{26} = 5.09901...$

(14)

Hur stort blir felet $E(x) = f(x) - L(x)$?

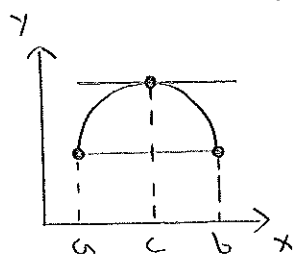
För att kunna uppskatta storleken av $E(x)$ behöver vi följande generalisering av Medelvärdessatsen:

Sats. Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b) . Om dessutom $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$, så finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Kommentar.

- Med $g(x) = x$ fås den vanliga Medelvärdessatsen.
- $g(b) \neq g(a)$, ty annars skulle det enligt Medelvärdessatsen finnas ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $g'(c) = 0$.



(15)

Bewis.

Sätt:

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) \\ - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

- h är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) eftersom f och g är det.
- $h(a) = h(b) = 0$

Medelvärdessatsen ger att det finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att:

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c) \\ h'(c) = 0$$

Men:

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x) \\ 0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \square$$

(16)

Sats. (Uppskattning av felet i linjär approximation)

Antag att $f''(t)$ existerar för alla t på ett intervall som innehåller a och x .

Då finns ett tal s mellan a och x ,

sådant att för felet $E(x) = f(x) - L(x)$

i den linjära approximationen

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

så gäller:

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (x-a)^2$$

Bevis.

Vi antar att $x > a$. (Fallet $x < a$ analogt.)

$$E(t) = f(t) - L(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$$

$$E'(t) = f'(t) - f'(a)$$

Vi använder nu den generaliserade Medelvärdes-satsen, med funktionerna $E(t)$ och $(t-a)^2$ på intervallet $[a, x]$:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{d}{dt}(t-a)^2}{2} = \frac{2(t-a)}{2} = t-a \\ & = 2(t-a) > 0 \\ & \forall t \in (a, x) \end{aligned}$$

(17)

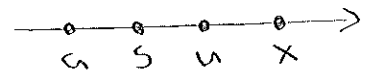
Det finns ett tal $u \in (a, x)$ sådant att:

$$\frac{E(x) - \overbrace{E(a)}^{=0}}{\underbrace{(x-a)^2 - (a-a)^2}_{=0}} = \frac{E'(u)}{2(u-a)}$$

$$\frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(u) - f'(a)}{u-a}$$

$$\nearrow = \frac{1}{2} \cdot f''(s) \quad \text{för något tal } s \in (a, u)$$

Medelvärdes-
satsen



$s \in (a, u)$
 $\Rightarrow$
 $s \in (a, x)$

Alltså:

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot f''(s) \cdot (x-a)^2$$

□

(18)

Exempel.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2}$$

Enligt tidigare exempel har vi:

$$\sqrt{26} = f(26) \approx L(26) = 5.1$$

För felet $E(26) = f(26) - L(26)$ fås:

$$E(26) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (26-25)^2 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s^{3/2}}$$

för något tal $s \in (25, 26)$.

$$|E(26)| < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{25^{3/2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{125} = \frac{1}{1000}$$

$$|f(26) - L(26)| < 0.001$$

Men $E(26) < 0$ eftersom $-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s^{3/2}} < 0$
för alla $s \in (25, 26)$.

$$\text{Alltså: } f(26) < L(26)$$

$$\text{Slutsats: } L(26) - 0.001 < f(26) < L(26)$$

$$5.1 - 0.001 < \sqrt{26} < 5.1$$

$$\underline{5.099 < \sqrt{26} < 5.1}$$

Miniräknare:

$$\sqrt{26} = 5.09901...$$

(19)

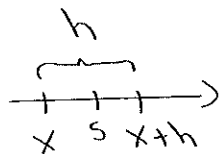
BM 6.1

Exempel. (Numerisk beräkning
av derivata.)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Om vi antar att f'' existerar på ett
intervall I som innehåller x och $x+h$
så fås med linjär approximation:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$$



Uppskattning av felet:

$$f(x+h) - \{f(x) + f'(x) \cdot h\} = \frac{1}{2} \cdot f''(s) \cdot h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{1}{2} \cdot f''(s) \cdot h$$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = \frac{1}{2} \cdot |f''(s)| \cdot h$$

diskretiseringsfel

$$\leq \frac{1}{2} \cdot K_f \cdot h$$

vi antar att
 f'' är uppåt
begränsad på I .

(20)

Men alla funktionsberäkningar
i MATLAB görs med ca 16 värde-
siffror. Därmed beräknas ej

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

exakt, utan vi får räkna med ett fel:

$$\frac{\delta_f + \delta_f}{h}$$

där $\delta_f \approx 10^{-15}$ om $|f(x)| \approx 1$.

Det bästa är att balansera felet:

$$\frac{1}{2} \cdot K_f \cdot h = \frac{2\delta_f}{h}$$

$$h^2 = 4 \frac{\delta_f}{K_f}$$

$$h = 2 \sqrt{\frac{\delta_f}{K_f}} \quad (\text{optimalt värde på } h)$$

$$\approx 10^{-7} \quad (\text{med } K_f \approx 1 \text{ och } \delta_f \approx 10^{-15})$$