

①

### 3.1 Invers funktion

### 3.5 Inversa trigonometriska funktioner.

Def.

En funktion  $f(x)$  kallas injektiv (ett-ett)

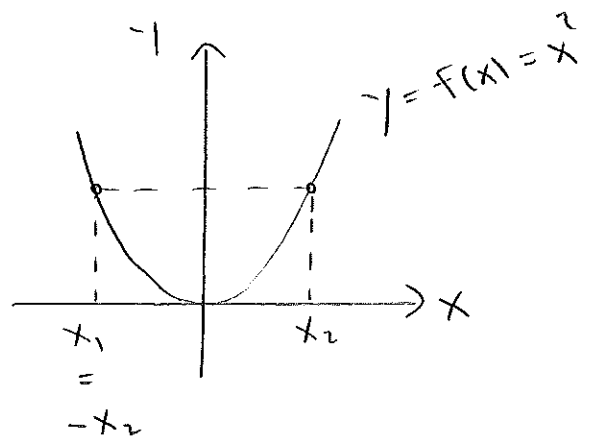
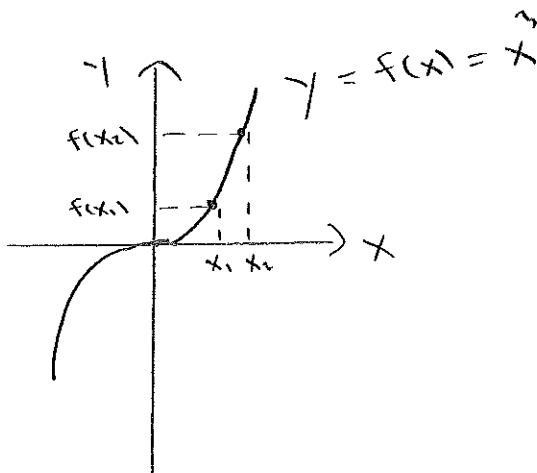
om  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  eller, ekvivalent,

om  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Exempel.

•  $f(x) = x^3$  är strängt växande på  $(-\infty, \infty)$  och därmed injektiv.

•  $f(x) = x^2$  är inte injektiv.



②

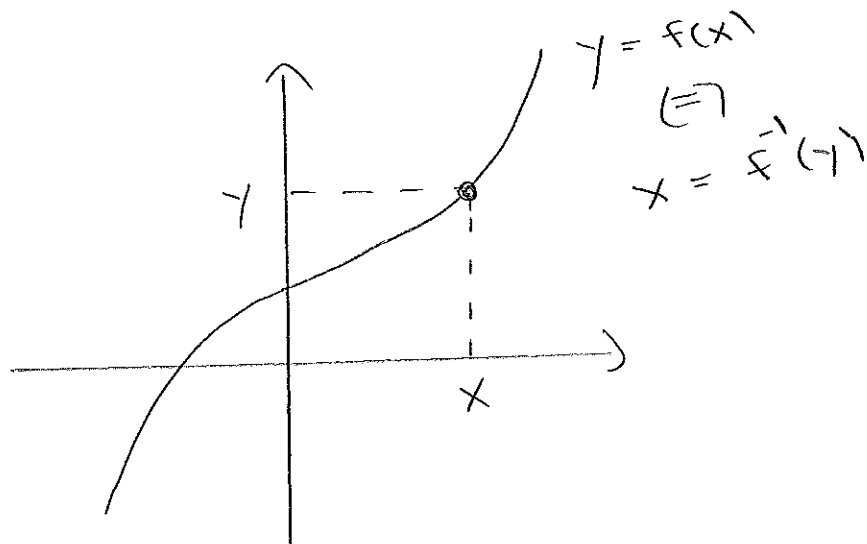
Def.

Antag att  $f$  är injektiv.

För varje  $y \in V(f)$  finns så ett unik  
 $x \in D(f)$  sådant att  $y = f(x)$ .

Vi skriver:  $x = f^{-1}(y)$

$f^{-1}$  kallas den inversa funktionen till  $f$ .



OBS!

$$V(f) = D(f^{-1})$$
$$D(f) = V(f^{-1})$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

↑ Vi använder ofta  $x$  som  
namn på oberoende variabel

③

Exempel.

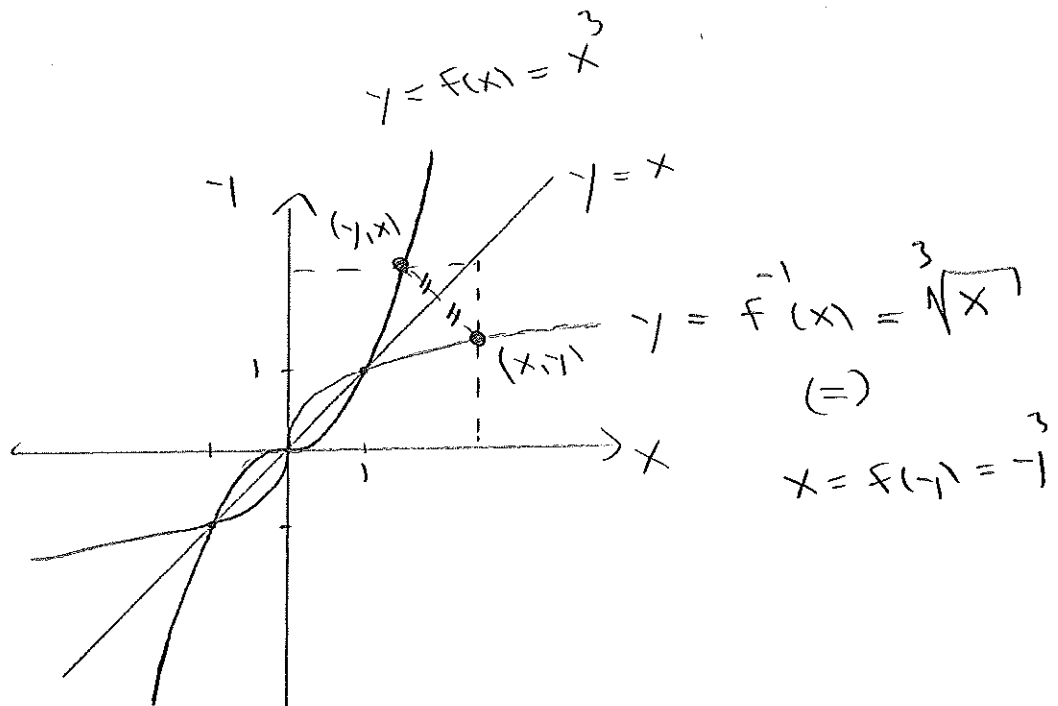
$$f(x) = x^3$$

Sök:  $f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y^3$$

$$\Leftrightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



Notera:

Graferna till  $y = f(x)$  och

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \text{ är}$$

varandras spegelbilder i linjen

$$y = x.$$

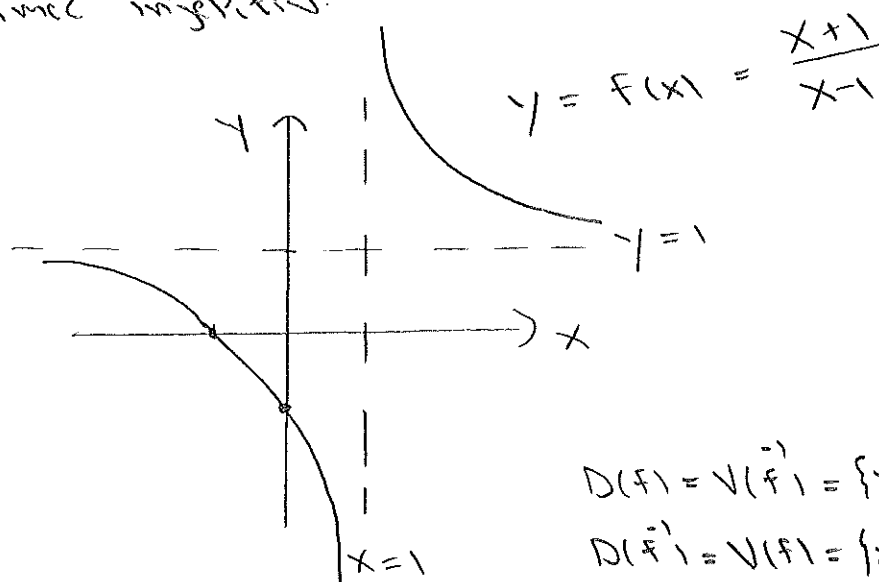
(4)

Exempel.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

$f(x)$  är strängt avtagande och  
dermed injektiv.



$$D(f) = V(f^{-1}) = \{x; x \neq 1\}$$

$$D(f^{-1}) = V(f) = \{x; x \neq 1\}$$

Sök:  $f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x = y+1$$

$$\Leftrightarrow yx - x = y+1$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = x+1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} = f^{-1}(x)$$

$f^{-1}(x) = f(x)$   
i detta fall

Gården symm.  
m.h.g.  $y=x$ .

⑤

Vi skall nu se hur vi kan beräkna

derivat  $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ .

Exempel.

$$f(x) = x^3$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\text{Vi vet: } \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

Detta kan vi också komma fram till  
med implicit derivering:

Sök:  $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = y^3 = [y(x)]^3$

$$\frac{dy}{dx}$$

Derivera bägge led m.a.p.  $x$ :

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} [y(x)]^3$$

$$1 = 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{kedjeregeln})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x^{1/3})^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{1}{f'(y)}$$

$$y = f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

⑥

Allmähnt:

$$y = f^{-1}(x) \quad (\Rightarrow) \quad x = f(y(x))$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} f(y(x))$$

$$1 = f'(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dy} f'(y(x)) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(y(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

⑦

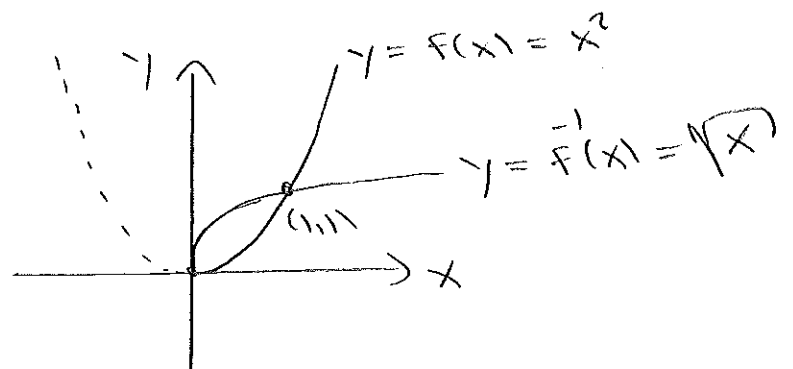
Många viktiga funktioner, t.ex. de  
trigonometriska funktionerna, är inte  
injektiva.

Genom att betrakta restriktioner  
(med minsta definitionsmängd) kan  
vi ändå definiera inversa funktioner.

Exempel.

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

är strängt växande



Sök:  $f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad x = f(y) = y^2, \quad y \geq 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad y = \sqrt{x} = f^{-1}(x)$$

48

Exempel.

$f(x) = \sin(x)$  är strängt växande

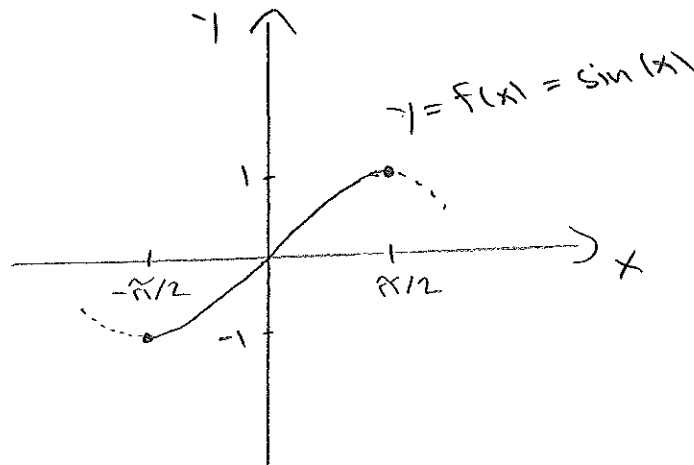
på  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Vi definierar:

$$y = f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

(=)

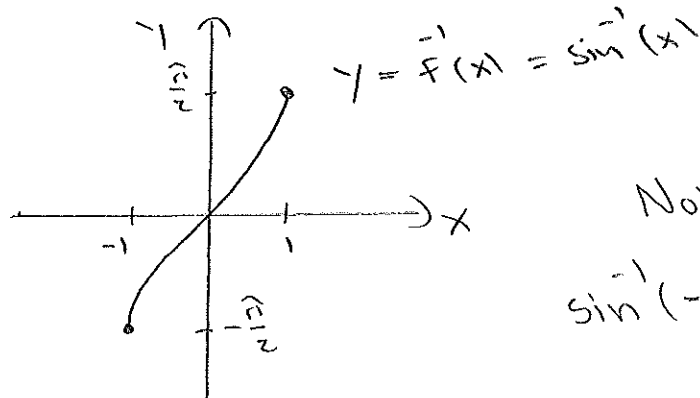
$$\begin{cases} \sin(y) = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Exempel.

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



Notera:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$$

eftersom:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

9

Vi beräknar derivatan till  $\sin^{-1}(x)$ :

$$y = \sin^{-1}(x) \quad \text{Sök: } \frac{dy}{dx}$$

(=)

$$\begin{cases} \sin(y) = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} [\sin(y(x))]$$

$$1 = \cos(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y(x))}$$

Trigonometriska ettan:  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(y) \geq 0\right)$$

$$\text{Alltså: } \frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(10)

Exempel.

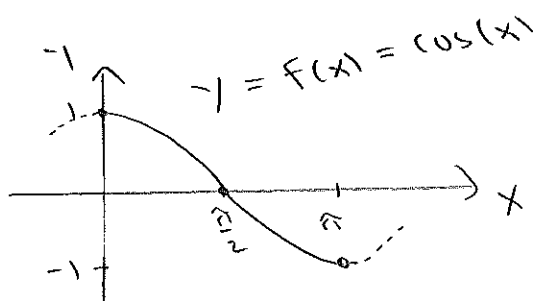
$f(x) = \cos(x)$  är strängt avtagande  
på  $[0, \pi]$ .

Vi definierar:

$$y = f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x) = \arccos(x)$$

(=)

$$\begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

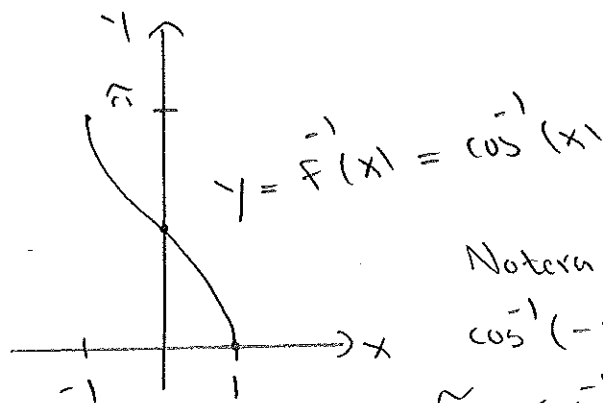
Exempel.

$$\cos^{-1}(-1) = \pi$$

$$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$



Notera:

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(-x) &= \\ \pi - \cos^{-1}(x) \end{aligned}$$

eftersom:

$$(*) \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

(11)

Vi kan beräkna  $\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x)$  analogt

med  $\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x)$ , men ett alternativ

är att utnyttja följande samband:

$$y = \cos^{-1}(x)$$

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{cases} x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

( $\Rightarrow$ )

$$\frac{\pi}{2} - y = \sin^{-1}(x)$$

( $\Leftrightarrow$ )

$$y = \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$$

$$\text{Alltså: } \frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(12)

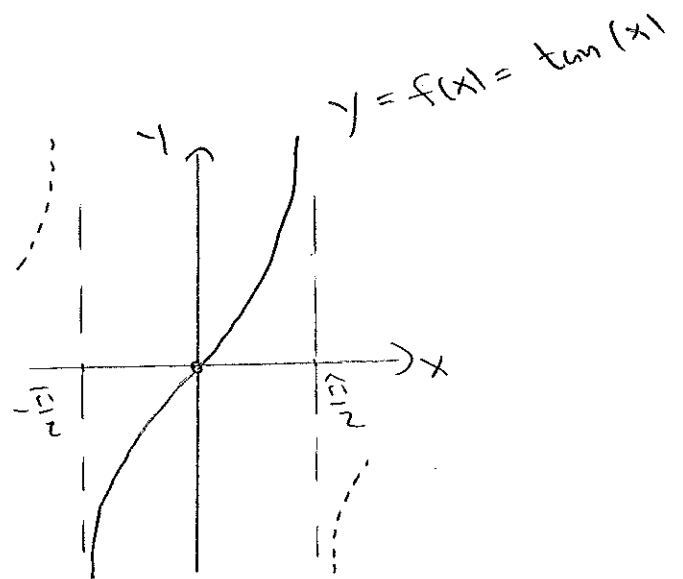
Exempel. $f(x) = \tan(x)$  är strängt växandepå  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Vi definierar:

$$y = f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$$

(=)

$$\begin{cases} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

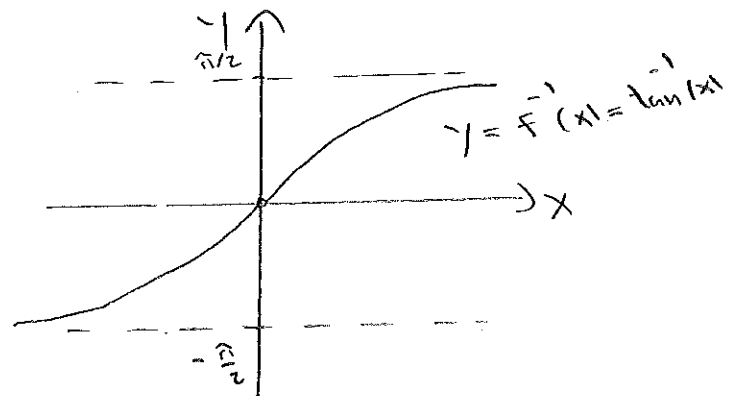
Exempel.

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$= -\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

Notera:  $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

(13)

Vi bestämmer derivatan till  $\tan^{-1}(x)$ :

$$y = \tan^{-1}(x)$$

$$\text{Sökta: } \frac{dy}{dx}$$

(=)

$$\begin{cases} \tan(y) = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} [\tan(y(x))]$$

$$1 = (1 + \tan^2(y(x))) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Exempel:

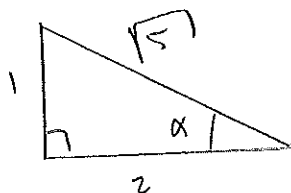
$$f(x) = \arctan(2x) = \tan^{-1}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

(14)

Exempel.

Beräkna  $\cos(\underbrace{\tan^{-1}(\frac{1}{2})}_{\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})})$



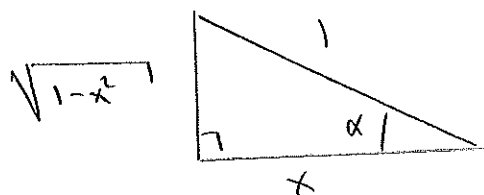
$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{2})) = \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Exempel.

Beräkna  $\tan(\underbrace{\cos^{-1}(x)}_{\alpha})$ .

Antag först  $0 < x \leq 1$ , så att  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$



$$\cos \alpha = x$$

$$\tan(\cos^{-1}(x)) = \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (*)$$

Antag nu att  $-1 \leq x < 0$  så att  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ :

$$\tan(\cos^{-1}(-x)) \stackrel{(*)}{=} -\sqrt{1-x^2}/x$$

$$\tan(\pi - \cos^{-1}(x)) = -\sqrt{1-x^2}/x$$

$$\cancel{\tan(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}/x}$$

Summa formel!

$$\begin{aligned} & \tan(\pi - \nu) \\ &= \frac{\sin(\pi - \nu)}{\cos(\pi - \nu)} \\ &= \frac{\sin(\nu)}{-\cos(\nu)} \\ &= -\tan(\nu) \end{aligned}$$

Bägg  
let  
värde.