

①

3.2 - 3.4 Exponential- och logaritmfunktioner

En exponentialfunktion är en funktion
på formen

$$f(x) = a^x$$

där basen a är en positiv konstant ($a > 0$)
och exponenten x är en variabel.

OBS! En potensfunktion är en funktion
på formen

$$f(x) = x^a$$

där basen x är en variabel
och exponenten a är en konstant.

②

För rationella och heltalsexponenter

definieras:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ st. faktorer}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

③

Vi skall strax se hur a^x kan
definieras för irrationella x .

Följande lagar gäller för både rationella
och irrationella exponenter:

$$1. \quad a^0 = 1$$

$$2. \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$3. \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$4. \quad a^{x-1} = \frac{a^x}{a^1}$$

$$5. \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$6. \quad (ab)^x = a^x b^x$$

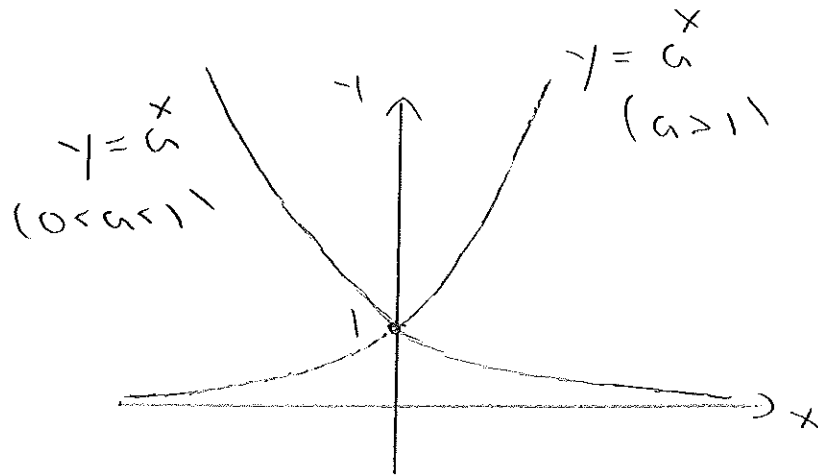
Kommentar.

Om x och y är rationella
(heltal) följer lagarna direkt
ur definitionerna på förra sidan.

④

Om $a > 1$ så är $f(x) = a^x$ strängt växande.

Om $0 < a < 1$ så är $f(x) = a^x$ strängt avtagande.



$$a > 1 : \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$0 < a < 1 : \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$$

⑤

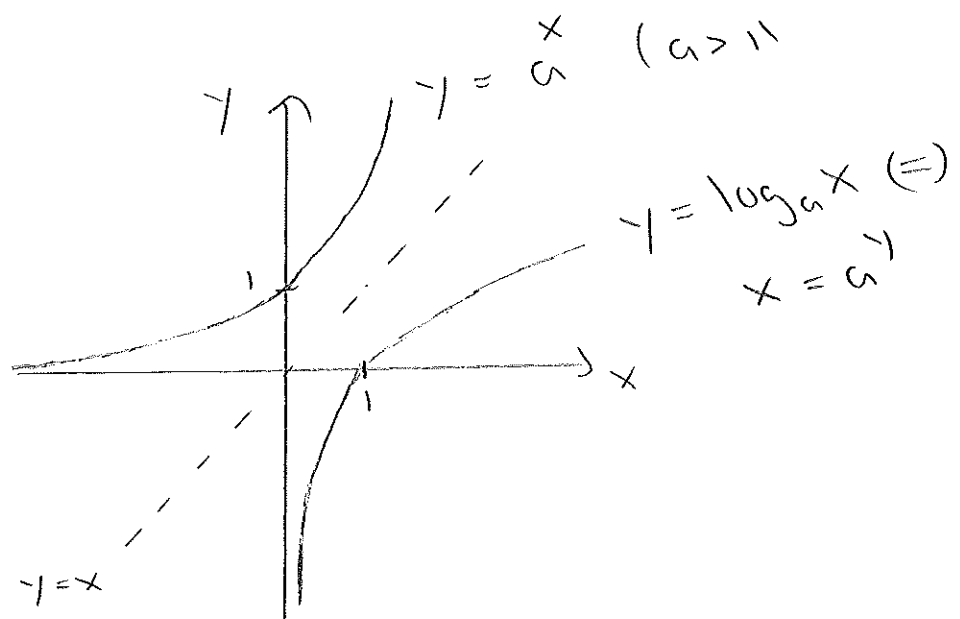
Eftersom $f(x) = a^x$ (för $a \neq 1$) är strängt
monoton, så existerar den inversa

funktionen $f^{-1}(x) = \log_a x$.

vilken kallas a -logaritmen av x .

Def.: Antag $a > 0$ och $a \neq 1$.

$$y = \log_a x \quad (\Leftrightarrow) \quad x = a^y$$



$$D(a^x) = V(\log_a x) = (-\infty, \infty)$$

$$D(\log_a x) = V(a^x) = (0, \infty)$$

(6)

OBS!

$$\bullet \log_a(a^x) = x, \quad \text{för alla reella } x$$

$$\bullet a^{\log_a x} = x, \quad \text{---} \quad x > 0.$$

Logaritmlagar:

Antag $x, y, a, b > 0$ ($a \neq 1, b \neq 1$)

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$3. \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$4. \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5. \log_a(x^y) = y \log_a x$$

$$6. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(7.)

Exempel.

$$2 \log_3 12 - 4 \log_3 6$$

$$= \log_3 (12^2) - \log_3 (6^4)$$

$$= \log_3 \left(\frac{12^2}{6^4} \right) = \log_3 \left(\frac{\cancel{8} \cdot 2 \cdot \cancel{8} \cdot 2}{\cancel{8} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{6}} \right)$$

$$= \log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = -2 \quad \left(\text{ty } 3^{-2} = \frac{1}{9} \right)$$

Bevis av 2.

$$\text{Vill visa: } \log_a (x \cdot y) = \underbrace{\log_a x}_u + \underbrace{\log_a y}_v$$

$$\text{Måste visa: } a^{u+v} = x \cdot y$$

$a^u = x$
 $a^v = y$

Erst potenslag:

$$a^{u+v} = a^u \cdot a^v = x \cdot y \quad \square$$

Notera: Logaritmlagar följer
ur potenslagar.

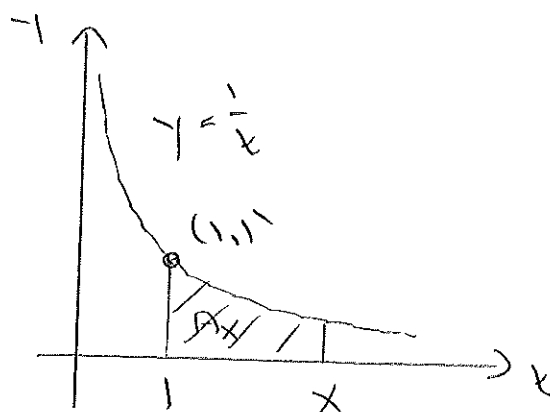
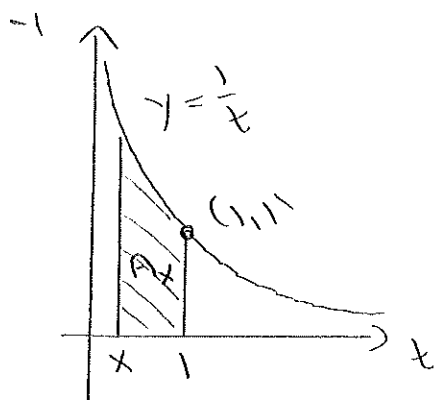
(8)

Vi skall nu se hur a^x kan
definieras för irrationella x .

Vi börjar med att definiera den
naturliga logaritmfunktionen:

För $x > 0$, låt A_x vara arean av
området som begränsas av kurvan $y = \frac{1}{t}$,
 t -axeln och de vertikala linjerna $t=1$ och $t=x$.

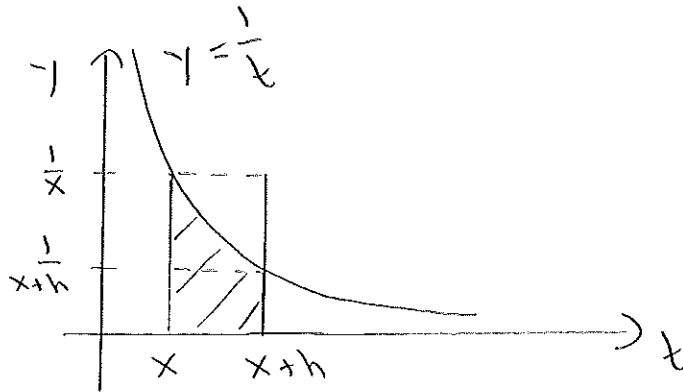
$$\ln x = \begin{cases} A_x, & x \geq 1 \\ -A_x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$



(9)

Sats: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, för alla $x > 0$

Bevis



Antag $h > 0$:

$$\begin{aligned} h \cdot \frac{1}{x+h} &< \overbrace{\ln(x+h) - \ln(x)}^{\text{streckvärdet}} < h \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x+h} &< \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Instänkningsregeln ger då $h \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

Analogt då $h \rightarrow 0^-$.

□

(10)

Sats. (Visar att $\ln x$ uppfyller
logaritmlagar)

$$1. \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$2. \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$3. \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$4. \quad \ln(x^r) = r \ln x$$

Bevis av 2.

$$\frac{d}{dx} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0, \quad \text{för alla } x > 0.$$

Men om $f'(x) = 0$ för alla $x > 0$ följer

ur medelvärdessatsen (*) att $f(x)$ är konstant

för $x > 0$. Alltså: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = C$. Sätt $x=1$
 $\Rightarrow$
 $C=0$.

□

(11)

(*)

Kommentar. (Se oxå Sats 13 i 2.8)

Vet: $f'(x) = 0$ för alla $x > 0$. $\left(\begin{array}{l} \Rightarrow f(x) \\ \text{kontinuerlig} \\ \text{för alla} \\ x > 0 \end{array} \right)$

Välj ett fixt tal $a > 0$:

$$C = f(a)$$

För ett godtyckligt tal $x > 0$ ($x \neq a$) förs
med medelvärdesatsen att det existerar
ett tal c mellan x och a sådant att:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$$

$$f(x) - f(a) = 0$$

$$f(x) = f(a) = C$$

□

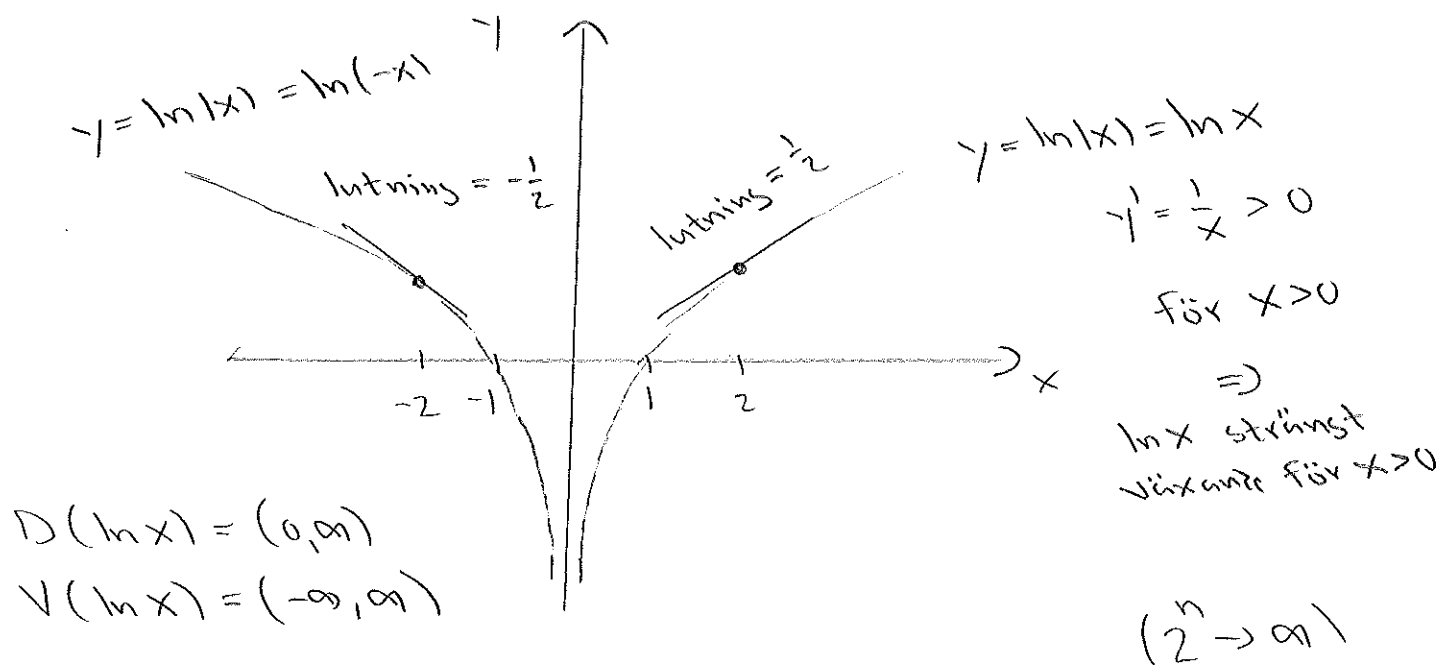
(12)

Exempel.

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{För alla } x \neq 0 \text{ t}_1:$$

t₁ för $x < 0$ Fås:

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$



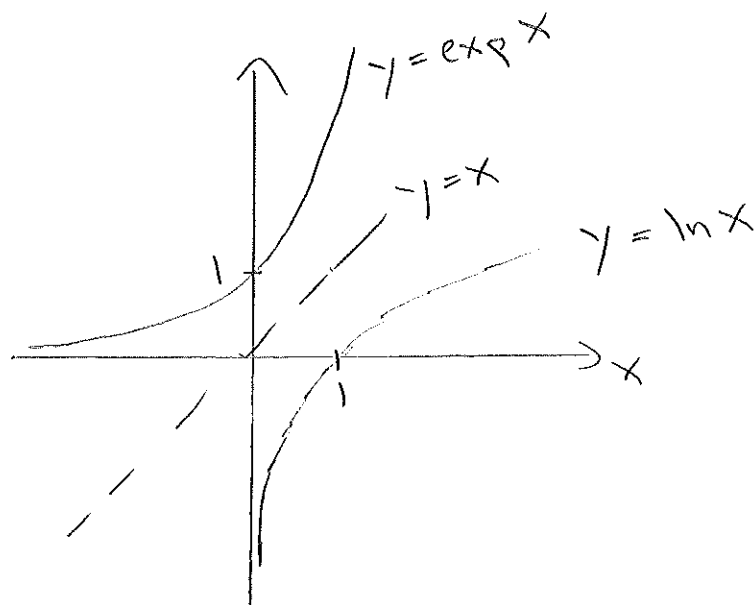
Notera: $\ln(2^n) = n \underbrace{\ln 2}_{> 0} \rightarrow \infty$, då $n \rightarrow \infty$

$\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\ln(2^n) \rightarrow -\infty$, då $n \rightarrow \infty$
 $\left(\frac{1}{2^n} \rightarrow 0^+\right)$

(13)

Eftersom $\ln x$ är strängt växande
på $(0, \infty)$ finns en invers funktion
som vi kallar $\exp x$.

$$y = \exp x \quad (\Rightarrow) \quad x = \ln y \quad (y > 0)$$



OBS! $\ln(\exp x) = x$, för alla x
 $\exp(\ln x) = x$, $x > 0$

$$D(\exp x) = V(\ln x) = (-\infty, \infty)$$

$$V(\exp x) = D(\ln x) = (0, \infty)$$

(14) Sats. (Visat att $\exp x$
uppfyller exponentlagar)

$$1. \quad (\exp x)^r = \exp(rx)$$

$$2. \quad \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

$$3. \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$4. \quad \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$$

Beweis av 2.

$$\text{Sätt } u = \exp x$$

$$v = \exp y$$

Lag 1. för $\ln x$ ger:

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v = x + y$$

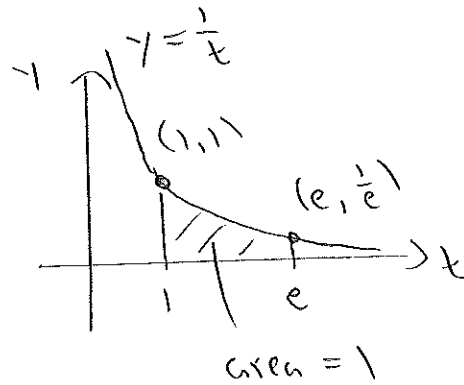
$$\text{Alltså: } uv = \exp(x+y)$$

□

(15)

Def. $e = \exp(1)$

Notera: $\ln e = 1$



$$e = 2.71828 \dots$$

OBS! För r rationellt gäller:

$$e^r = (\exp(1))^r \stackrel{\text{Lag.}}{=} \exp(1 \cdot r) = \exp(r)$$

Vi definierar nu:

$$e^x = \exp(x) \quad \text{För alla reella tal } x.$$

(16)

Exponentlagarna blir så:

$$1. \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

$$2. \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

$$3. \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$4. \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

Notera: $\ln x = \log_e x$

Nu beräknar vi derivatan av e^x :

Sätt:
 $y = e^x$

$$y = e^x \quad (\Rightarrow) \quad x = \ln y$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial x} \ln y = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y = e^x$$

Alltså:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$$

(17.)

För en godtycklig bas $a > 0$ definieras:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

Derivata av a^x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (a^x) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \cdot \ln a \\ &= \underline{\underline{a^x \cdot \ln a}}\end{aligned}$$

Derivata av $\log_a x$:

$$y = \log_a x \quad (\Leftrightarrow) \quad x = a^y$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial x} (a^y) = a^y \cdot \ln a \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x} (\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}}$$

18

Exponentialfunktioner kan användas för att modellera tillväxt / avtagande hos en storhet y där förändringshastigheten är proportionell mot storheten själv:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k \cdot y & (\text{differentialkv.}) \\ y(0) = y_0 & (\text{begränsningsvillkor}) \end{cases}$$

$$\text{Lösning: } y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$\text{Test: } \frac{dy}{dt} = y_0 \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot y$$

$$y(0) = y_0 \cdot e^0 = y_0$$

Exempel. (Radioaktivt sönderfall)

Vid en arkeologisk undersökning av Tutankhamuns grav har man kommit fram till att 66,9% av den ursprungliga mängden kol-14 återstår. Hur många år är det enligt denna mätning sedan Tutankhamun dog? Halveringstiden för kol-14 är 5730 år.

(19)

γ_0 : Ursprünglich mänge 101-14

t : Zeit sedan Tutankhamun das (är).

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = k\gamma & (k < 0) \\ \gamma(0) = \gamma_0 \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{kt}$$

Vet : $\gamma(5730) = \frac{\gamma_0}{2}$

Alltså : $\gamma_0 e^{5730k} = \frac{\gamma_0}{2} \Leftrightarrow e^{5730k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5730}$

$$\approx -1.2 \cdot 10^{-4}$$

Vet : $\gamma(T) = 0.669 \gamma_0$

$$\cancel{\gamma_0} \cdot e^{kT} = 0.669 \cancel{\gamma_0}$$

$$T = \frac{\ln 0.669}{k} = 5730 \cdot \frac{\ln 0.669}{\ln(1/2)}$$

$$\approx 3300 \text{ år.}$$