

①

### 3.3 Den naturliga logaritm- och exponentialfunktionen (Forts.)

#### Sammanfattning.

1. Definiera  $\ln x$  m.h.a. arean under kurvan  $y = \frac{1}{t}$ .

2. Visa att  $\ln x$  uppfyller logaritmlagarna:

i)  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$  " Derivera och utnyttja att  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$  "

ii)  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

iii)  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

iv)  $\ln(x^r) = r \ln x$  ( $r$  rationellt tal)

3. Definiera  $\exp x$  som invers till  $\ln x$ :

Ger:

$$\begin{cases} \exp 0 = 1 \\ \frac{d}{dx} \exp x = \exp x \end{cases}$$

$$y = \exp x \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \ln y \quad (y > 0)$$

4. Visa att  $\exp x$  uppfyller exponentlagarna:

i)  $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$

ii)  $\exp(-x) = 1/\exp x$

iii)  $\exp(x-y) = (\exp x)/(\exp y)$

iv)  $(\exp x)^r = \exp(rx)$

"Följer ur lagarna för  $\ln$ "

5. Definiera:

$$e = \exp(1) = 2.71828...$$

6.  $e^r = (\exp(1))^r \stackrel{\text{iv}}{=} \exp(r \cdot 1) = \exp r$

7. Definiera:  $e^x = \exp x$ , för alla reella  $x$   
 $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ , " "

②

### 3.4 Tillväxt och avtagande

Sats. Om  $a > 0$ :

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

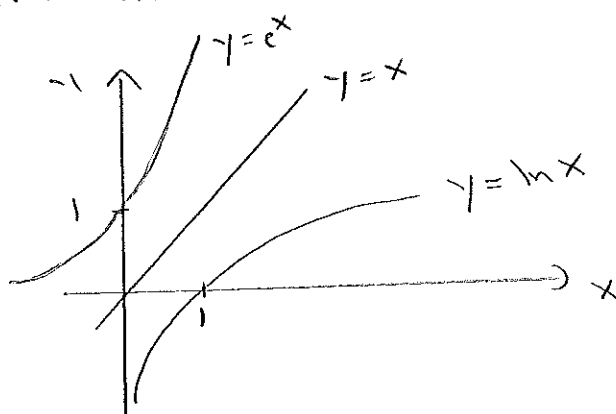
$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^x = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$

Bevis. —

" exp vinner över potensfunktion "

" potensfunktion vinner över ln "



$\ln x \rightarrow \infty$ ,  $\text{då } x \rightarrow \infty$   
 $x \rightarrow \infty$ ,  $\text{då } x \rightarrow \infty$   
 $e^x \rightarrow \infty$ ,  $\text{då } x \rightarrow \infty$   
 ↑  
 fort

(3)

Exponentialfunktioner kan användas för att modellera tillväxt/avtagande hos en storhet  $y$  där förändringshastigheten är proportionell mot storheten själv:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k \cdot y & (\text{differenzialekvation}) \\ y(0) = y_0 & (\text{begynnelsevillkor}) \end{cases}$$

Lösning:  $y(t) = y_0 e^{kt}$

Test:  $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y_0 \cdot k e^{kt} = k \cdot y & \text{OK!} \\ y(0) = y_0 e^0 = y_0 & \text{OK!} \end{cases}$

Exempel. (Radioaktivt sönderfall)

Vid en arkeologisk undersökning av Tutankhamuns grav har man kommit fram till att 66,9% av den ursprungliga mängden kol-14 återstår. Hur många år är det enligt denna mätning sedan Tutankhamun dog?

Halveringstiden för kol-14 är 5730 år.

(4)

$y_0$  : Ursprünglich mængde 101-14

$t$  : Tid sedan Tutankhamun dog (år)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k \cdot y & (k < 0) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 e^{k \cdot t}$$

$$\text{Vet: } y(5730) = \frac{y_0}{2}$$

$$y_0 e^{5730k} = \frac{y_0}{2} \quad (\Rightarrow) \quad 5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(\Rightarrow) \quad k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} \approx -1,2 \cdot 10^{-4}$$

År sedan Tutankhamun dog

$$\text{Vet också: } y(T) = 0,669 y_0$$

$$y_0 e^{k \cdot T} = 0,669 y_0$$

$$T = \frac{\ln 0,669}{k} = 5730 \cdot \frac{\ln 0,669}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\approx \underline{\underline{3300 \text{ år}}}$$

5

## 4.1 Relaterade hastigheter

En ekvation som uttrycker ett samband mellan två (eller flera) tidsberoende storheter kan deriveras m.a.p. tiden.

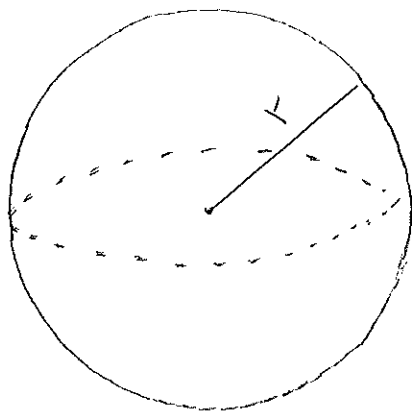
Den resulterande ekvationen uttrycker då ett samband mellan storheternas förändringshastigheter.

6

Exempel. (Ålams 4.1: 7)

Luft pumpas in i en sfärisk ballong.

Ballongens volym ökar med  $20 \text{ cm}^3/\text{s}$  när radien är  $30 \text{ cm}$ . Med vilken hastighet ökar radien vid denna tidpunkt?



$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial t} = 4\pi r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial r}{\partial t}}} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \cdot 30^2} \cdot 20$$

$$= \frac{5}{900\pi} \text{ cm/s} = \underline{\underline{\frac{1}{180\pi} \text{ cm/s}}}$$

⑦

## 4.4 Extremvärden

(4.2 Gie uppl.)

Definition. (Absoluta extremvärden)

En funktion  $f$  har ett absolut (globalt) maximum  $f(x_0)$  i punkten  $x_0 \in D(f)$  om  $f(x) \leq f(x_0)$  för alla  $x \in D(f)$ .

Analogt för absolut (globalt) minimum.

(8)

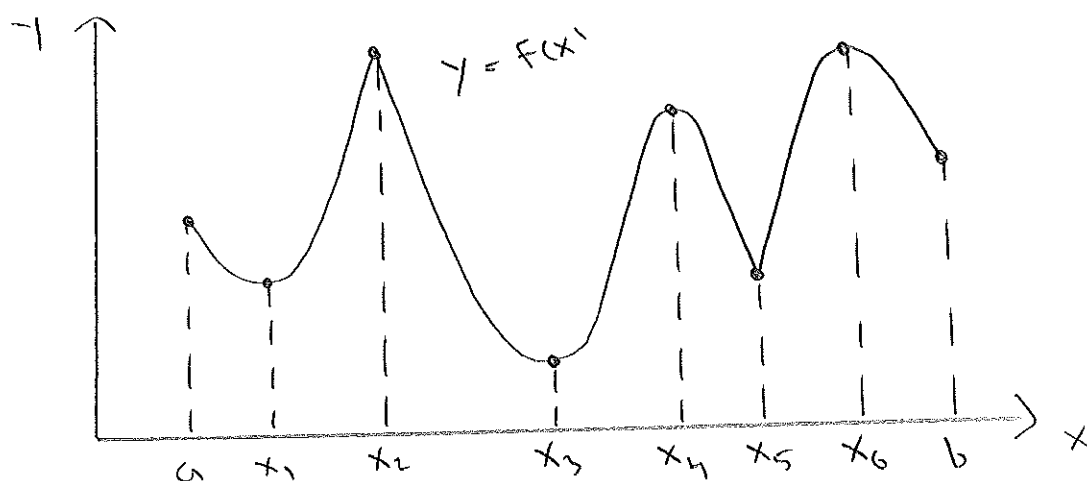
# Definition (Lokala extremvärden)

En funktion  $f$  har ett lokalt maximum

$f(x_0)$  i punkten  $x_0 \in D(f)$  om det existerar

ett tal  $h > 0$  sådant att  $f(x) \leq f(x_0)$

för alla  $x \in D(f)$  med  $|x - x_0| < h$ .



$$D(f) = [a, b]$$

$f$  har lokala maxima i  $a, x_2, x_4, x_6$  (lokala max-punkter)

-||- minima i  $x_1, x_3, x_5, b$  (lokala min-punkter)

$f$  har absolut maximum i  $x_2$ . (absolut max-punkt)

-||- minimum i  $x_3$ . (absolut min-punkt)



(9)

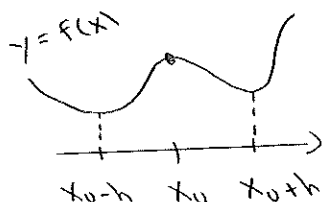
Sats ( Lokalisering av extremvärden )

Om funktionen  $f$  är definierad på ett intervall  $\bar{I}$  och har ett lokalt extremvärde i punkten  $x_0 \in \bar{I}$ , så finns tre alternativ:

i)  $x_0$  är en kritisk (stationär) punkt,  
d.v.s.  $f'(x_0) = 0$ .

ii)  $x_0$  är en singulär punkt,  
d.v.s.  $f'(x_0)$  existerar ej.

iii)  $x_0$  är en ändpunkt till  $\bar{I}$ .

Bevis.

Antag att  $f(x_0)$  är ett lokalt maximum, och att  $x_0$  varken är en singulär punkt eller en ändpunkt.

Därmed existerar  $f'(x_0)$  och det finns ett intervall  $(x_0 - h, x_0 + h)$  på vilket  $f(x_0)$  är största värde.

Därmed är  $f'(x_0) = 0$ . (Th. 14 i/2.8) <sup>avsnitt</sup>

□

(10)

Vi illustrerar med ett par exempel hur man kan finna absoluta och lokala extremvärden.

Metoden bygger på att bestämma kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter, samt göra ett teckenstudium av derivatan.

Kom ihåg: (Följsats till Medelvärdesatsen)

Om  $f'(x) > 0$  på ett intervall, så är  $f$  strängt växande på intervallet.

Om  $f'(x) < 0$  på ett intervall, så är  $f$  strängt avtagande på intervallet.

(11)

Exempel.

$$f(x) = x \sqrt{8-x^2}, \quad -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$$

Kommentar.

$f$  är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet  $[-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$ . Därmed vet vi (Th. 8, Avsnitt 1.4) att både absolut maximum (största värde) och absolut minimum (minsta värde) existerar.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{8-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{\sqrt{8-x^2} \cdot \sqrt{8-x^2} - x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-x^2-x^2}{\sqrt{8-x^2}} \\ &= \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{2(2-x)(2+x)}{\sqrt{8-x^2}} \end{aligned}$$

Kritiska punkter:  $f'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \pm 2$

Singulära punkter:  $f'(x)$  existerar ej  $(\Rightarrow) \quad x = \pm \sqrt{8}$

Randpunkter:  $x = \pm \sqrt{8}$

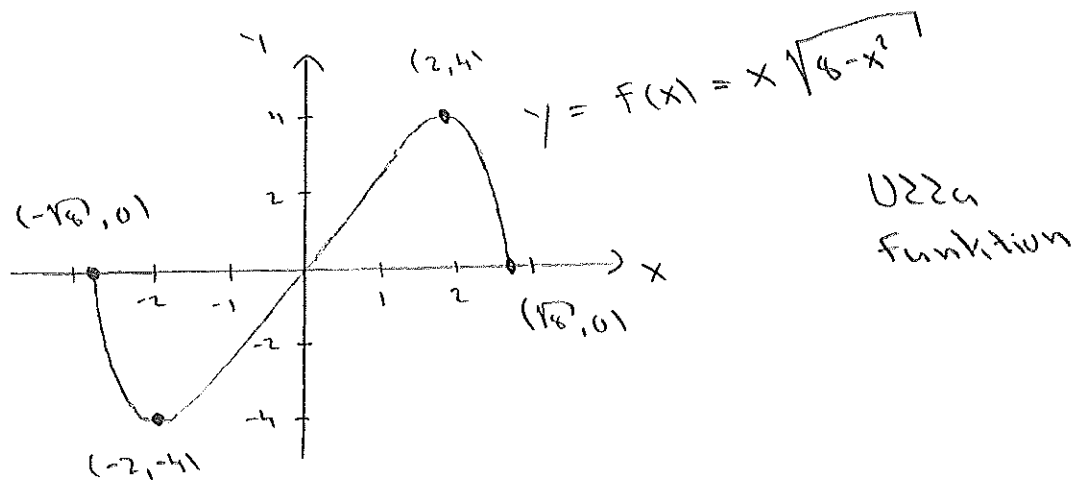
(12)

Teckentabell:

|                                            | $-\sqrt{8}$ |            | $-2$ |            | $2$ |            | $\sqrt{8}$ | $x$ |
|--------------------------------------------|-------------|------------|------|------------|-----|------------|------------|-----|
| $2-x$                                      | +           | +          | +    | +          | 0   | -          | -          |     |
| $2+x$                                      | -           | -          | 0    | +          | +   | +          | +          |     |
| $f'(x) = \frac{2(2-x)(2+x)}{\sqrt{8-x^2}}$ | undef.      | -          | 0    | +          | 0   | -          | undef.     |     |
| $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$                     | max         | $\searrow$ | min  | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min        |     |

$$f(\pm\sqrt{8}) = 0$$

$$f(\pm 2) = \pm 2\sqrt{8-4} = \pm 4$$



Lokale max-punkte:  $x = -\sqrt{8}, x = 2$

Lokale maxima:  $0, 4$

Lokale min-punkte:  $x = -2, x = \sqrt{8}$

Lokale minima:  $-4, 0$

Absolut maximum:  $4$

-11- minimum:  $-4$

(13)

Exempel. ( Adams 4.4: 25 )

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad -\infty < x < \infty$$

Kommentar.

Eftersom  $D(f)$  är ett obegränsat intervall kan vi inte vara säkra på att absolut maximum och absolut minimum existerar.

$$f'(x) = \frac{2x(\cancel{x^2+1}) - \cancel{x^2} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Kritiska punkter :  $f'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0$

Singulära punkter : -

Randpunkter : -

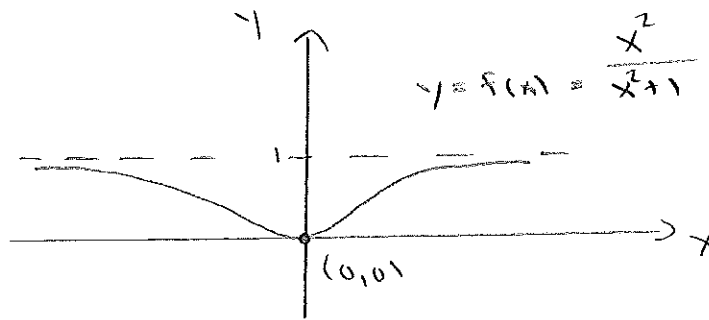
Tecken tabell :

|         |            | 0   |                 |
|---------|------------|-----|-----------------|
|         |            |     | $\rightarrow x$ |
| $f'(x)$ | -          | 0   | +               |
| $f(x)$  | $\searrow$ | min | $\nearrow$      |

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + 1/x^2} = 1$$

(14)



Dünn  
funktion

Lokal minimum i  $x=0$ .

Absolut -"- i  $x=0$ .

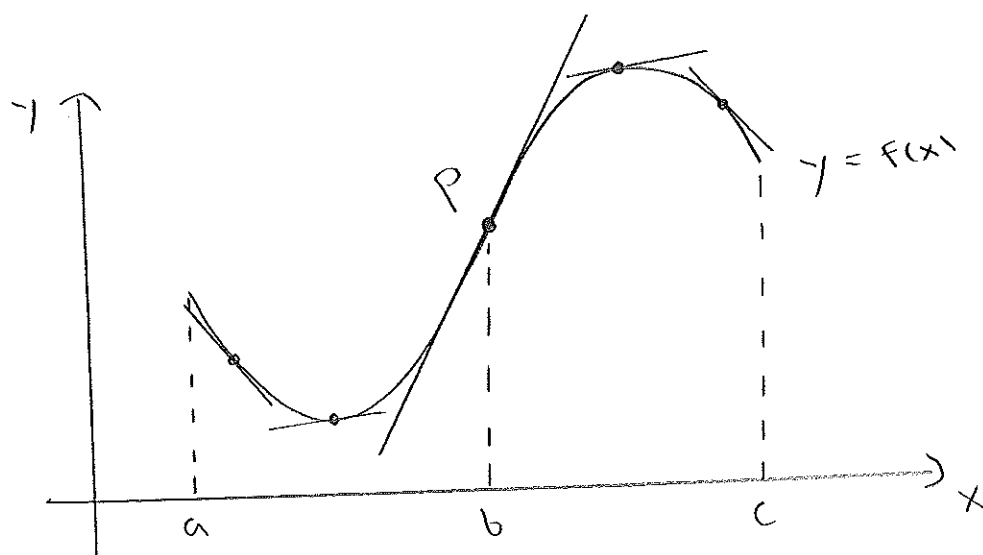
Absolut maximum existerar ej

(15)

4.5 Konvexitet och Konkavitet.(4.3  
Gie uppl.)Inflexionspunkter.Definition.

En funktion  $f$  är konkav upp (konvex) på ett öppet intervall  $I$ , om den är deriverbar där och  $f'$  är strängt växande på  $I$ .

$f$  är konkav ned (konkav) på ett öppet intervall  $I$ , om den är deriverbar där och  $f'$  är strängt avtagande på  $I$ .



$f$  är konvex på  $(a, b)$  och konkav på  $(b, c)$ .

$P = (b, f(b))$  är en inflexionspunkt.

(16)

### Definition.

En punkt  $(x_0, f(x_0))$  på kurvan  $y = f(x)$

är en inflexionspunkt, om:

(a) Kurvan har en tangent i punkten.

(b)  $f$  är konvex på ena sidan av  $x_0$   
och konkav på andra sidan av  $x_0$ .

### Sats.

(a) Om  $f''(x) > 0$  på ett intervall  $I$ , så  
är  $f$  konvex på  $I$ .

(b) Om  $f''(x) < 0$  på ett intervall  $I$ , så  
är  $f$  konkav på  $I$ .

(c) Om  $f$  har en inflexionspunkt  $(x_0, f(x_0))$ ,  
och  $f''(x_0)$  existerar, så är  $f''(x_0) = 0$ .

### Bevis:

(a)  $(f')' > 0 \Rightarrow f'$  strängt växande

(b)  $(f')' < 0 \Rightarrow f'$  strängt avtagande

(c)  $f'$  strängt växande på ena sidan av  $x_0$   
och strängt avtagande på andra sidan av  $x_0$

$\Rightarrow f'$  har lokalt extremvärde i  $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$ .  
( $x_0$  inflexionspunkt)



⑦

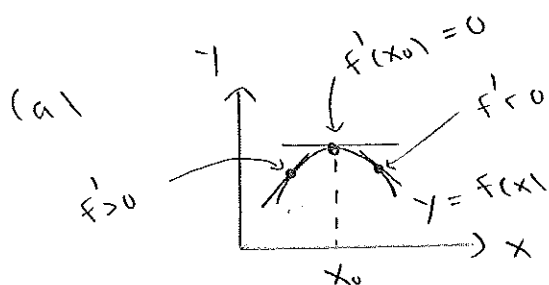
Sats.

(a) Om  $f'(x_0) = 0$  och  $f''(x_0) < 0$ , så har  $f$  ett lokalt maximum i  $x_0$ .

(b) Om  $f'(x_0) = 0$  och  $f''(x_0) > 0$ , så har  $f$  ett lokalt minimum i  $x_0$ .

(c) Om  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ , så kan vi inte dra någon slutsats:  $f$  kan ha lokalt extremvärde i  $x_0$ , men det kan också vara en inflexionspunkt (i detta fall terasspunkt)

Bevis.



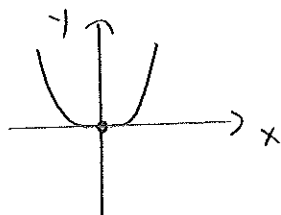
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{h} = f''(x_0) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0+h) < 0 \text{ för små } h > 0$$

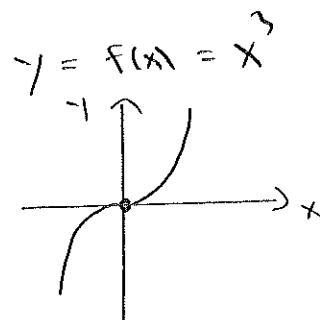
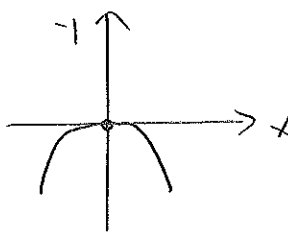
$$f'(x_0+h) > 0 \quad \text{---} \quad h < 0$$

(b) Analogt.

(c)  $y = f(x) = x^4$



$y = f(x) = -x^4$



I samtliga fall:  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

(18)

Exempel.

$$f(x) = x e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (1-x) e^{-x}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (x-2) e^{-x}$$

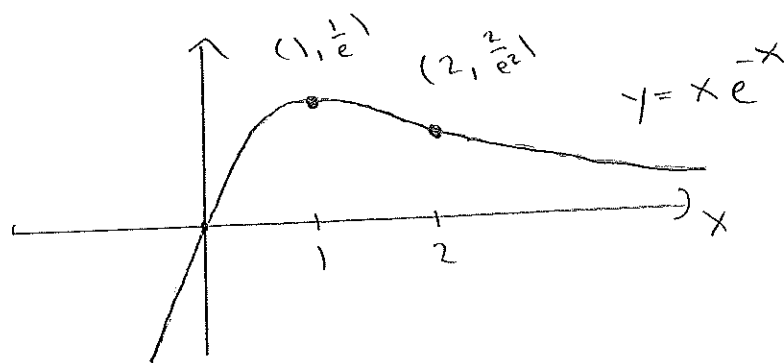
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$$

|                        |            | 1   | 2          |              |
|------------------------|------------|-----|------------|--------------|
| $f'(x) = (1-x)e^{-x}$  | +          | 0   | -          | -            |
| $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ | -          | -   | 0          | +            |
| $f(x) = x e^{-x}$      | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |              |
|                        | $\cap$     |     | $\cap$     | infl. $\cup$ |

$$\left. \begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f''(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokalt maximum } f(1) = \frac{1}{e} \text{ i } x=1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty \end{array} \right. \quad \text{" } e^x \text{ vinner \u00f6ver } x \text{ "}$$



Lokalt maximum  $\frac{1}{e}$  i  $x=1$ .

Inflexionspunkt :  $(2, \frac{2}{e^2})$