

①

(4.4 i 6e upplagan)

4.6 Kurvkonstruktion

Procedur för att rita grafen till $y = f(x)$.

1. Beräkna $f'(x)$ och $f''(x)$. Faktorisera.

2. Undersök $f(x)$:

- definitionsmängd
- asymptoter (vertikal / horisontell / snett)
- symmetri (udda / jämn)
- beräkna vissa punkter på grafen, t.ex. skärning med axlarna samt ändpunkter.

3. Undersök $f'(x)$:

- kritiska punkter ($f'(x) = 0$)
- singulära " " ($f'(x)$ existerar ej)
- gör teckentabell: ta med kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter, och bestäm tecknet på f' mellan dessa.
- beräkna funktionsvärden i kritiska punkter och singulära punkter

②

4. Undersök $f''(x)$:

- $f''(x) = 0$
- $f''(x)$ existerar ej
- gör teckentabell: ta med punkterna ovan,
och bestäm tecknet på f'' mellan dessa,
samt (vilket följer) var f är konvex
och konkav
- inflexionspunkter

③

Exempel. (4.6 : 11)

Rita grafen till $y = f(x) = \frac{x^3}{1+x}$

$$1. \quad f'(x) = \frac{3x^2(1+x) - x^3 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2}$$

$$'' \quad f''(x) = \frac{(6x^2 + 6x)(1+x)^2 - (2x^3 + 3x^2) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{6x(1+x)^2 - 2x^2(2x+3)}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2 + 3x + 3)}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{2x \left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right)}{(1+x)^3}$$

④

2.

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x}$$

Definitionsmängd: $x \neq -1$

Vertikal asymptot: $x = -1$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{array} \right)$$

Ingen horisontell eller
sned asymptot

$$\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \right)$$

$f(x)$ växer som x^2
när $x \rightarrow \pm\infty$

kan ej närma
sig en rät linje.

Skärning med axlarna: $(0, 0)$

$$f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0$$

Varken udda eller jämn:

$$f(1) = 1/2$$

$f(-1)$ existerar ej

(5)

3.

$$f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$x = 0$$

e).

4.

$$x = -3/2$$

$$f''(x) = \frac{2x \left((x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \right)}{(1+x)^3} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0$$

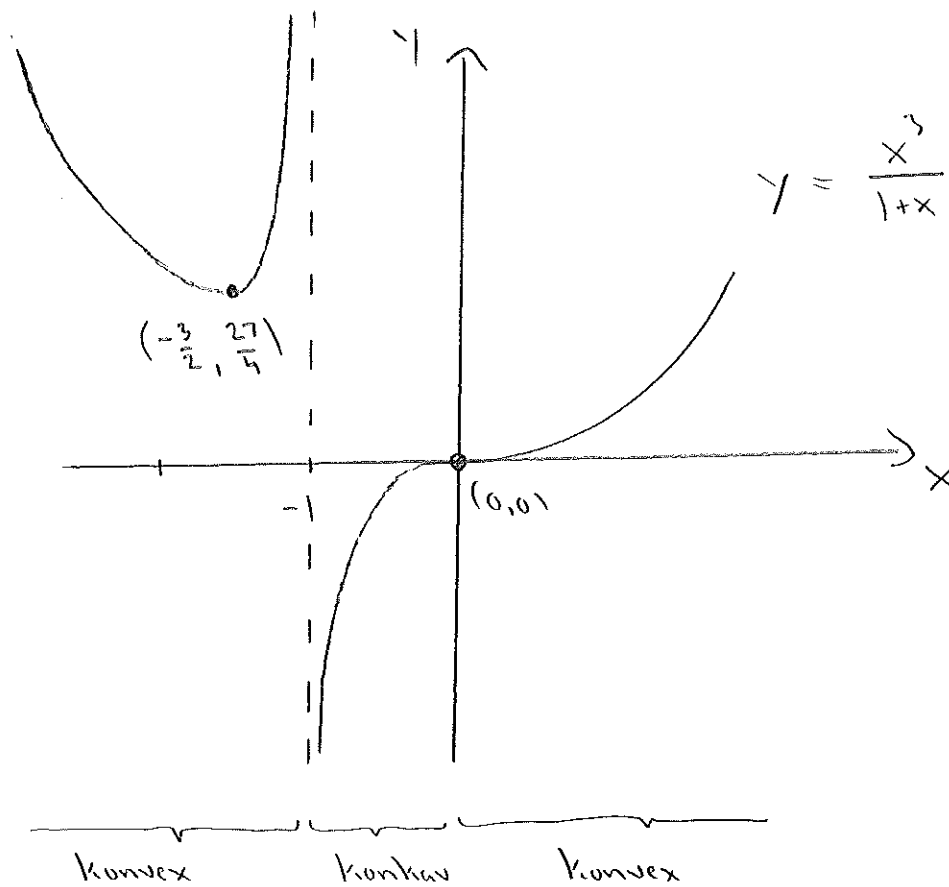
$f'(x)$ och $f''(x)$ existerar ej i $x = -1$.
($\notin D(f)$)

		-3/2		-1		0	
f'	-	0	+	ozerf.	+	0	+
f''	+	+	+	ozerf.	-	0	+
f	↘	min	↗	ozerf.	↗		↗
	∪		∪		∩		∪

Lokalt minimum: $f(-\frac{3}{2}) = \frac{(-\frac{3}{2})^3}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{27}{4}$

Inflexionspunkt: $(0, f(0)) = (0, 0)$

6



Kommentar: I detta fall är inflexionspunkten
i $(0,0)$ också en terrasspunkt
(horisontell tangent skär kurvan)

⑦ (4.5 i Gie upplagan)

4.8 Några tillämpade extremvärdesproblem

Lösningsprocedur

1. Läs noggramt igenom problemet.
Var är givet? Var söks?
2. Om problemet innehåller geometri:
rita figur
3. Inför symboler.
4. Uttryck storheten Q som skall
maximeras eller minimeras som en
funktion av en eller flera variabler.
5. Om Q beror av n variabler,
med $n > 1$, finn $n-1$ ekvationer
som kopplar samman variablerna.

(Om detta inte är möjligt kan
problemet ej lösas med envariabel-
analys.)

(4)

6. Använd de $n-1$ ekvationerna för att eliminera variabler, och uttryck Q som en funktion av en variabel.

Bestäm relevant definitionsomängd för problemet.

7. Bestäm absolut maximum eller absolut minimum för Q med de tekniker vi tidigare studerat.

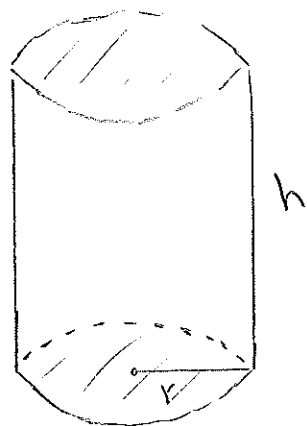
8. Gör en rimlighetsbedömning av ditt svar.

9

Exempel.

Vi vill tillverka en rak, cirkulär cylinder med volymen V .

Hur skall cylindern designas för minimal materialåtgång?



$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{botten + lock}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{mantel-yta}}$$

Eliminera h :

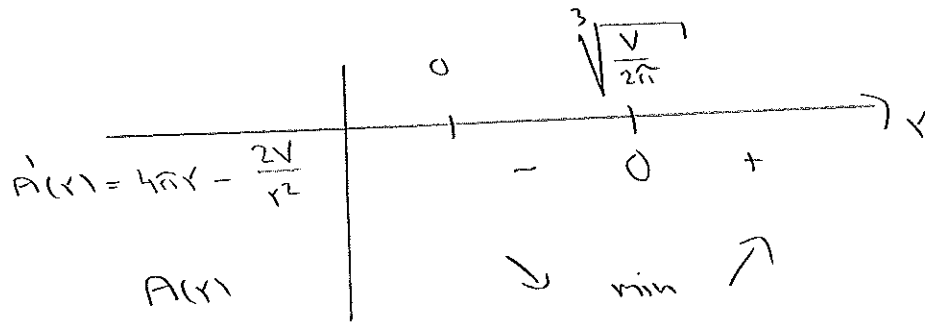
$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0 \end{aligned}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 4\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

10)

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi} = \frac{r^2 h}{2}$$

$$r = \frac{h}{2} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$



Svar: Våls $r = \frac{h}{2}$

2.v.s. $h = 2r = \text{diametern.}$

11)

Exempel. (4.8 : 19)

En biltillverkare säljer 2000 bilar/månad.

Den genomsnittliga vinsten är \$ 1000 / bil.

En marknadsundersökning indikerar att varje sänkning av priset med \$ 50 medför en förväntad ökning av antalet sålda bilar med 200 bilar/månad. Hur stor prissänkning skall biltillverkaren erbjuda för att maximera sin månatliga vinst?

Antag att priset sänks med \$ x .

Förväntat antal sålda bilar/månad: $2000 + 200 \cdot \frac{x}{50}$

Genomsnittlig vinst / bil: \$ $(1000 - x)$

Månatlig vinst:

$$V(x) = (2000 + 4x)(1000 - x)$$

$$= 2000\,000 + 2000x - 4x^2, \quad 0 \leq x \leq 1000$$

12

$$V'(x) = 2000 - 8x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 250$$

	0	250	1000	
				$\rightarrow x$
$V'(x)$	+	0	-	
$V(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	

Alternativ: $V''(250) = -8 < 0$
 $\Rightarrow$ Lokalt maximum

Svar: En prissänkning med \$ 250
ger maximal månatlig vinst.

(13)

Newtons metod

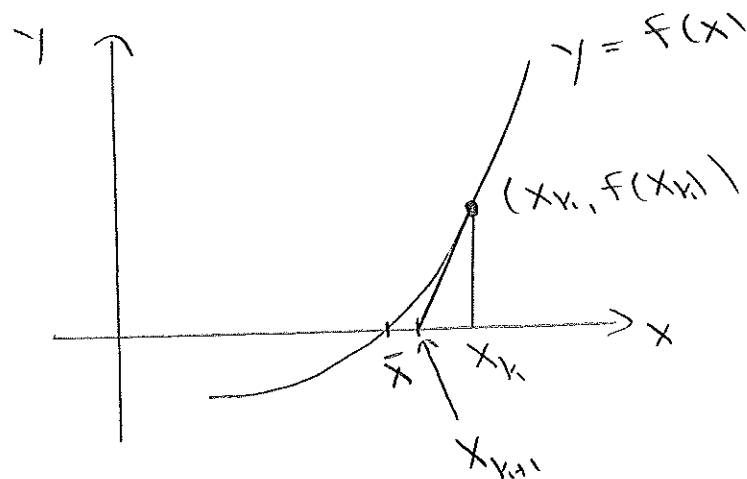
(Newton-Raphsons
metod)

BM 6.2

Adams 4.2 (4.6 i 6:e upplagan)

Kom ihåg:

Newtons metod bygger på linjär approximation:



$\bar{x}$: exakt lösning, d.v.s. $f(\bar{x}) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



nollställe till tangenten
i punkten $(x_k, f(x_k))$

(14)

Newtons metod är en "optimal"

fixpunktsiteration:

$$f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = \cancel{x} - \frac{\cancel{f'(x)} \cdot f(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2} = 0$$

Alltså: $g'(x) \approx 0$ på litet intervall
nära roten.

g har en mycket liten
Lipschitz-konstant

$\Rightarrow$ snabb konvergens

om det konvergerar.

(15)

OBS! För att Newtons metod skall fungera måste $f'(x_k) \neq 0$.

Sats. Om $\frac{1}{|f'(x)|} \leq M$ för alla $x \in \bar{I}$

där $\bar{I}$ är ett intervall som innehåller x_k och $\bar{x}$, så gäller:

$$|x_k - \bar{x}| \leq M |f(x_k)|$$

Bevis:

Medelvärdessatsen ger:

$$\frac{f(x_k) - \overbrace{f(\bar{x})}^{=0}}{x_k - \bar{x}} = f'(s)$$

för något s mellan x_k och $\bar{x}$.

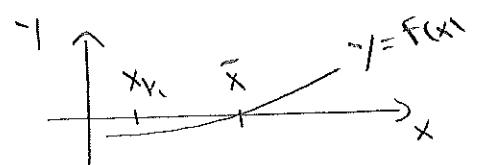
$$x_k - \bar{x} = \frac{f(x_k)}{f'(s)}$$

$$|x_k - \bar{x}| = \frac{1}{|f'(s)|} \cdot |f(x_k)| \leq M |f(x_k)| \quad \square$$

OBS!

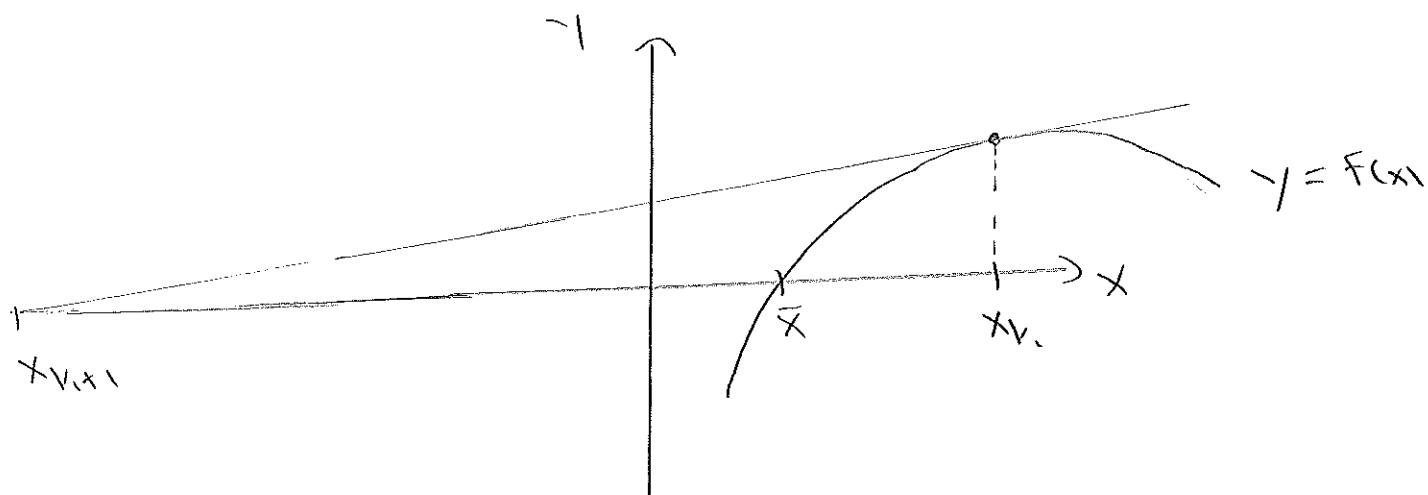
Om $f'(x)$ är liten på $\bar{I}$, d.v.s. M stor, så kan felet $|x_k - \bar{x}|$ vara stort även om $f(x_k) \approx 0$.

Ekvationen blir svår att lösa.



(16)

Det är också möjligt att den
linjära approximationen leder helt fel:
om vi startar för långt från roten.



(17)

Om Newtons metod konvergerar, så
är konvergensen mycket snabb
(kvadratisk konvergens).

Sats. Om $\frac{1}{|f'(x)|} \leq M$ och $|f''(x)| \leq K$
för alla $x \in I$, där I är ett
intervall som innehåller x_k , x_{k+1} och $\bar{x}$
så gäller:

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} MK |x_k - \bar{x}|^2$$

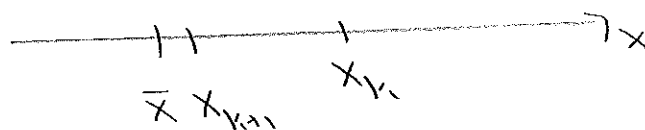
Bewis. —

(18)

OBS!

Om metoden konvergerar så är

$$|x_{k+1} - \bar{x}| < |x_k - \bar{x}|$$



Därmed gäller:

$$|x_k - \bar{x}| = |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - \bar{x}|$$

$$\leq |x_k - x_{k+1}| + \underbrace{|x_{k+1} - \bar{x}|}_{\text{mycket mindre än de andra termerna}}$$

$$\approx |x_k - x_{k+1}|$$

Stopp-kriterium: $|x_k - x_{k+1}| \leq \text{TOL}$