

①

Linjära ekvationssystem (Lag 1.1)

Exempel. (Tic ekv., tic obekanta)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Matrisform:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & b_3 \end{bmatrix}$$

Gauss-elimination

Idé: Överför matrisen på trappstegsform

m.h.a. elementära radoperationer:

1. Multiplicera en rad med ett tal $\neq 0$
2. Addera en multipl av en rad till en annan rad
3. Byt plats på två rader.

OBS! Dessa operationer förändrar inte lösningsmängden.

②

Procedur vir entydig lösning:

* = soðtycklist tal

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & 1 & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & 1 & * & | & * \\ 0 & 0 & * & | & * \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & | & * \\ 0 & 1 & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{bmatrix}$$

Alt 1

Alt 2

$$x_3 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$x_1 = \dots$$

"bakåt -
substitution"

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & | & * \\ 0 & 1 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 1 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$x_3 = \dots$$

(3)

OBS!

Om det vid Gauss-elimination uppträder en rad:

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ ; \ * \quad (\text{där } * \neq 0)$$

så saknas lösning.

(Systemet är ej konsistent)

④

Lipschitz-kontinuitet (BM2)

En funktion $f(x)$ säges vara Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I om:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Konstanten L kallas för Lipschitz-konstant

Exempel.

$f(x) = x^2$ är Lipschitz-kontinuerlig på $[0, 3]$

med $L = 6$, ty:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in [0, 3] : |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |(x+y)(x-y)| \\ &= (x+y) |x-y| \\ &\leq (3+3) |x-y| \\ &= 6 |x-y|\end{aligned}$$

⑤

Om $f(x)$ är deriverbar på I så kan

vi värtja $L = \max_{x \in I} |f'(x)|$

(om $f'(x)$ är begränsad på I)

Beris:

(se nästa sida)

Exempel.

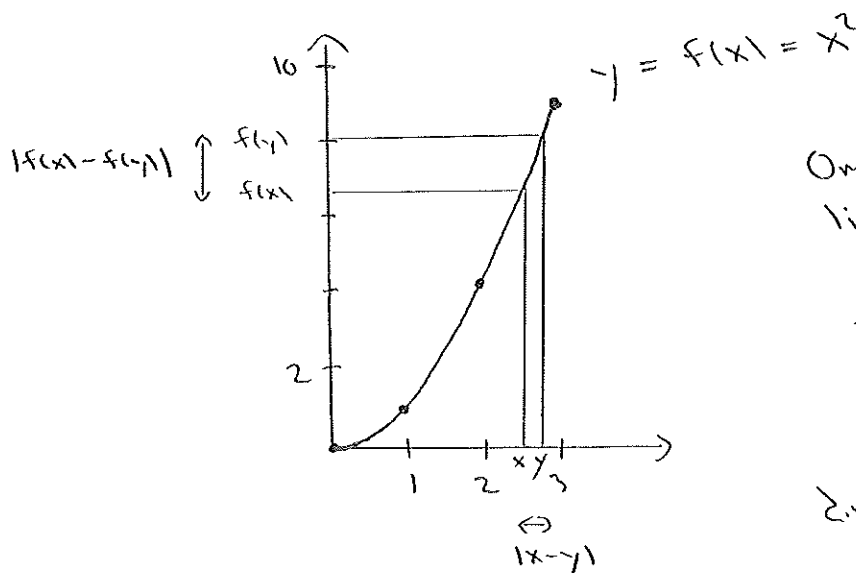
För $f(x) = x^2$ fäs på intervallet $[0, 3]$:

$$L = \max_{x \in [0, 3]} \overbrace{|2x|}^{f'(x)} = 6$$

OBS! (beloppet av)

L mäter / den maximala lutningen hos f på I ,

z.v.s. hur mycket $f(x)$ (output) maximalt kan
ändras så x (input) ändras.



Om både x och y
ligger nära 3 så är

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \approx f'(3) = 6$$

$$\text{z.v.s. } |f(x) - f(y)| \approx 6|x - y|$$

6)

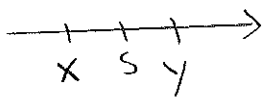
$L=6$ är den minsta möjliga Lipschitz-konstanten.

Däremot är alla $L > 6$ också Lipschitz-konstanter till $f(x) = x^2$ på $[0,3]$, t.ex.:

$$\forall x, y \in [0,3]: |f(x) - f(y)| \leq 10 |x - y|$$

Men lå oss överskatta vi förändringen i output.

Notera: Medelvärdessatsen ger om f är deriverbar på I :



$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(s) \quad \left(\begin{array}{l} x, y \in I \\ s \text{ mellan } x \text{ och } y \end{array} \right)$$

$$f(x) - f(y) = f'(s) (x - y)$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(s)| |x - y|$$

$$\leq \underbrace{\max_{x \in I} |f'(x)|}_L |x - y|$$

7)

Numerisk lösning av ekvationer

(BM 4) • Bisektionsalgoritmen $(f(x) = 0)$

(BM 5) • Fixpunktsiteration $(x = g(x))$

(BM 6) • Newtons metod $(f(x) = 0)$

Bisektionsalgoritmen används i beviset
av Bolzanos sats.

Fixpunktsiteration används i beviset

av kontraktionsavbildningsatsen (fixpunkts-
satsen)

(8)

Varför numerisk lösning av ekvationer?

Exempel. (Symbolisk lösning)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \text{"pq-formeln"}$$

$$x = 1 \text{ eller } x = 3$$

Exempel.

$$x^5 - 4x + 3 = 0$$

$$x = ?$$

Finns ingen formel!

⑨

Algoritm ersätter formel.

1. Starta med x_0
2. Givet x_i , beräkna x_{i+1}
enligt en given regel.
3. Upprepa 2.

Detta genererar en talföljd:

$$\{x_i\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Vi hoppas: $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$

$\nearrow$
exakt lösning

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (\text{bisektion, Newton})$$

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \quad (\text{fixpunkt})$$

(10)

Bisektionsmetoden

Givet : • $f(x)$: funktion som är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$.

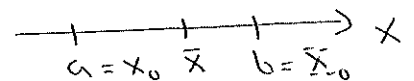
• $f(a)f(b) < 0$ (dvs. $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken)

• tol : tolerans

$$f(\bar{x}) = 0$$

Algorithm:

1. $x_0 = a, \bar{x}_0 = b$



2. $i = 0$

3. Så länge som $|x_i - \bar{x}_i| > \text{tol}$:

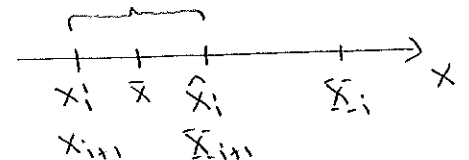
$$\hat{x}_i = (x_i + \bar{x}_i) / 2$$

Om $f(x_i)f(\hat{x}_i) < 0$:

lösning här

$$x_{i+1} = x_i$$

$$\bar{x}_{i+1} = \hat{x}_i$$

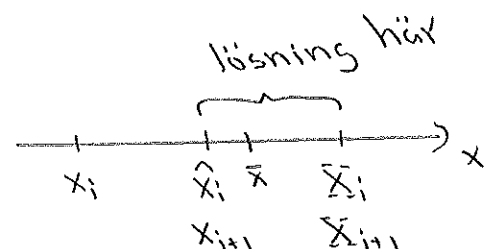


Om $f(\hat{x}_i)f(\bar{x}_i) < 0$:

lösning här

$$x_{i+1} = \hat{x}_i$$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i$$



Om $f(\hat{x}_i) = 0$:

$$x_{i+1} = \bar{x}_{i+1} = \hat{x}_i$$

$$i = i + 1$$

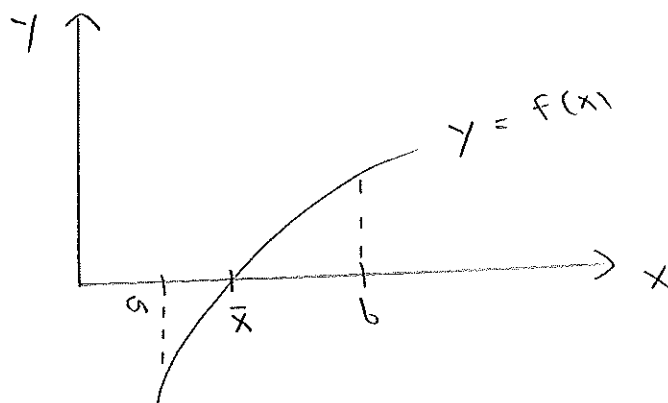
11

Bolzanos sats

Antag : • $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$
 • $f(a)f(b) < 0$

Då existerar $\bar{x} \in (a, b)$ s.a. $f(\bar{x}) = 0$.

Om f är strängt växande (avtagande) så är lösningen $\bar{x}$ entydig (enda nollstället till f)



Bevis : (*) Antag f Lipschitz-kontinuerlig på $[a, b]$

Steg 1 : Bisektionsalgoritmen ger :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0, x_1, x_2, x_3, \dots \\ \parallel \\ a \end{array} \right\}$$

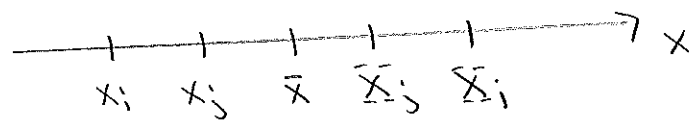
(*) Vi bevisar satsen under detta extra antagande.

(12)

Steg 2:

$\{x_i\}$ är en Cauchy-följd, ty för $j > i$ fås:

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - \bar{x}_i| = \frac{b-a}{2^i} \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty$$



Alltså: $|x_i - x_j| \rightarrow 0$, då $i, j \rightarrow \infty$

Talen i följden närmar sig varandra.

De delar fler och fler decimaler.

En decimalutveckling (reellt tal) växer fram:

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

13

Steg 3:

$\bar{x}$ är en lösning till ekvationen, ty:

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq L |x_i - x_j| \rightarrow 0, \text{ då } i, j \rightarrow \infty$$

$\uparrow$
f Lipschitz

Alltså: $\{f(x_i)\} = \{f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots\}$ är
och är en Cauchy-följd.

$$f(\bar{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0, \text{ ty:}$$

$$|f(x_i)| = |f(x_i) - 0|$$

$$\leq |f(x_i) - f(\bar{x}_i)|$$

$\uparrow \quad \nearrow$
olika tecken

$$\leq L |x_i - \bar{x}_i|$$

$$= L \frac{b-a}{2^i} \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty.$$

(14)

Steg 4:

(aufgabe)
Antag $f(x)$ strengst wachsende på $[a, b]$:

$$a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) < f(y) \quad (>)$$

Om $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = 0$, för $\bar{x}, \bar{y} \in [a, b]$,

måste förmed $\bar{x} = \bar{y}$.



(15)

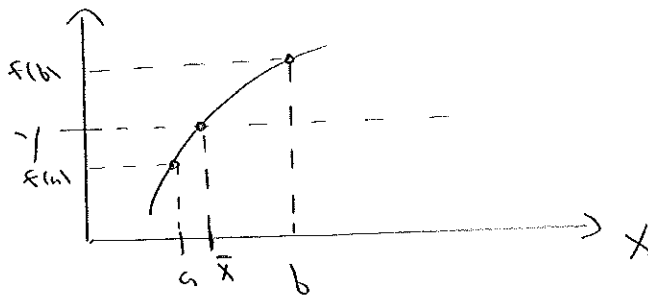
Satsen om mellanliggande värden.

Antag: • $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$

• Talet γ ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$. (*)

Då existerar $\bar{x} \in (a, b)$ s.a. $f(\bar{x}) = \gamma$.

Om f är strängt växande (avtagande)
så är lösningen $\bar{x}$ entydig.



Bevis: Sätt $h(x) = f(x) - \gamma$

$$h(a)h(b) = (f(a) - \gamma)(f(b) - \gamma) < 0$$

↑ ↑
olikhetstecken (*)

Bolzano ger $\bar{x} \in (a, b)$ s.a.

$$h(\bar{x}) = 0 \quad (=\Rightarrow)$$

$$f(\bar{x}) = \gamma$$

□

16

Fixpunktsiteration

Fixpunktsalgoritmen är avsett för ekvationer på fixpunktsform:

$$x = g(x) \quad (\text{fixpunktsekvation})$$

OBS!

Ekvationen måste inte vara på fixpunktsform från början.

Exempel.

$$x^3 - 5x + 2 = 0 \quad (1)$$

$(\Rightarrow)$

$$x = \underbrace{\frac{x^3 + 2}{5}}_{g(x)} \quad (2)$$

Kan vi hitta en lösning till (2) med
fixpunktsiteration: $\bar{x} = g(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^3 + 2}{5}$

så är $\bar{x}$ också en lösning till (1): $\bar{x}^3 - 5\bar{x} + 2 = 0$

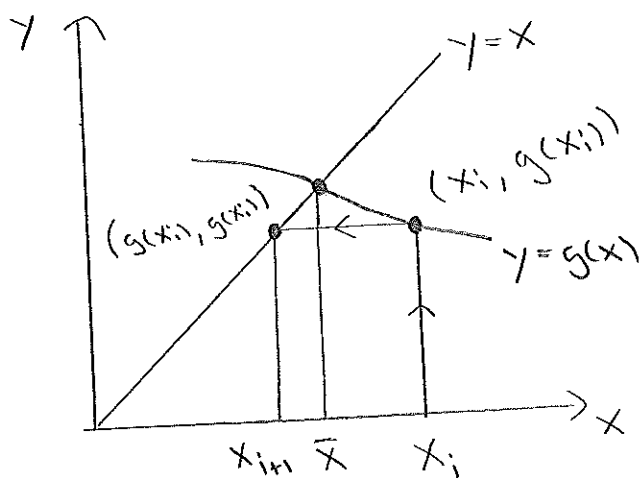
17

Algorithm:

1. Starta med x_0 .
2. $i = 0$
3. $x_1 = g(x_0)$
4. Så länge som $|x_i - x_{i+1}| > \text{tol}$:

$$i = i + 1$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$



$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

(18)

När konvergerar fixpunktsiteration?

Kontraktionsavbildningssatsen (fixpunktssatsen)

Antag: • $g(x)$ är Lipschitz-kontinuerlig på $I = [a, b]$:

$$\forall x, y \in I: |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

för $L < 1$. ("g är en kontraktion")

$$\bullet x \in I \Rightarrow g(x) \in I$$

$$\text{d.v.s. } a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq g(x) \leq b$$

Då existerar en entydig lösning $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, s.d.:

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

för $x_0 \in I$ är en godtycklig startpunkt.

Kommentar: I kan vara obegränsat: $[a, \infty)$
 $(-\infty, b]$
 $(-\infty, \infty)$

(19)

Bevis:

Steg 1: Fixpunktsiteration ger:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \\ & g(x_0) & g(x_1) & g(x_2) & \end{array} \right\}$$

Notera: $x_0 \in I \Rightarrow x_1 \in I \Rightarrow x_2 \in I \Rightarrow \dots$

Steg 2: $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd, ty:

$$|x_1 - x_2| = |g(x_0) - g(x_1)| \leq L |x_0 - x_1|$$

$$|x_2 - x_3| = |g(x_1) - g(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \leq L^2 |x_0 - x_1|$$

$\vdots$

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \dots \leq L^i |x_0 - x_1| \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty$$

räcker kunna hit

$\uparrow$
 $L < 1$

För $j > i$: $|x_i - x_j| \leq \dots \leq \dots \rightarrow 0, \text{ då } i \rightarrow \infty$

Steg 3: $\bar{x} = g(\bar{x})$ (behöver ej kunna bevisa detta steg)
" " "
 $\lim x_i$ $\lim g(x_i)$

Steg 4: $\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}, \bar{y} \in I \\ \bar{x} = g(\bar{x}), \bar{y} = g(\bar{y}) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} |\bar{x} - \bar{y}| = |g(\bar{x}) - g(\bar{y})| \\ \geq 0 \leq L |\bar{x} - \bar{y}| \\ \underbrace{(1-L)}_{>0} |\bar{x} - \bar{y}| \leq 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \end{array}$

(20)

Newton's metode

Algorithm:

1. Starta med x_0 .

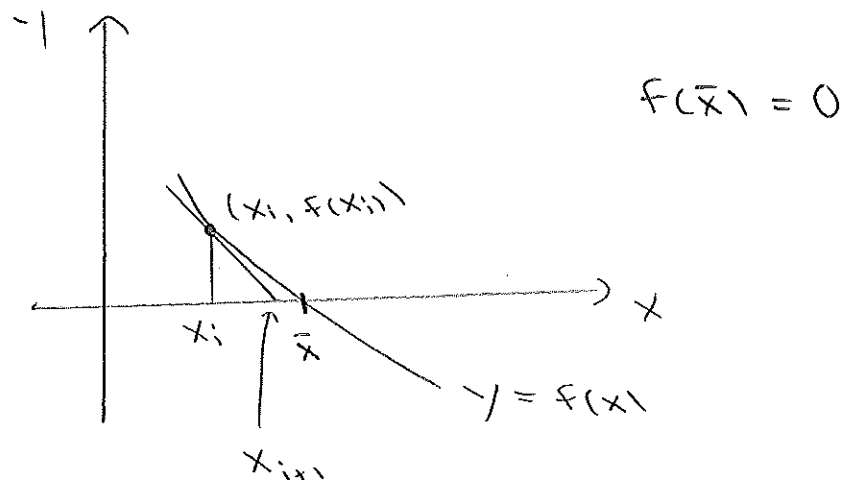
2. $i = 0$

$$3. \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

4. Så länge som $|x_i - x_{i+1}| > \text{tol}$:

$$i = i + 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



②

För- och nackdelar

Bisektion:

😊 Pålitlig. Konvergerar alltid om $f(a)f(b) < 0$.

😞 Alltid snabbare än linjär konvergens:

$$|x_{i+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} |x_i - \bar{x}|$$

😊 Kan ej användas på system av ekvationer.

Fixpunkt:

😊 Kan konvergera snabbt för små värden på L :

$$\begin{array}{ccc} |x_{i+1} - \bar{x}| & \leq & L |x_i - \bar{x}| \\ \text{"} & & \text{"} \\ g(x_i) & & g(\bar{x}) \end{array}$$

😊 Kan användas på system.

😞 Kan vara svårt att hitta g och ett intervall I där det konvergerar.

(22)

Newton:

😊

Kvadratisk (mycket snabb!)

konvergens:

$$|x_{i+1} - \bar{x}| \leq C |x_i - \bar{x}|^2$$

😊

Kan användas på system.

😞

Kan divergera om x_0 ej
valts tillräckligt nära $\bar{x}$.

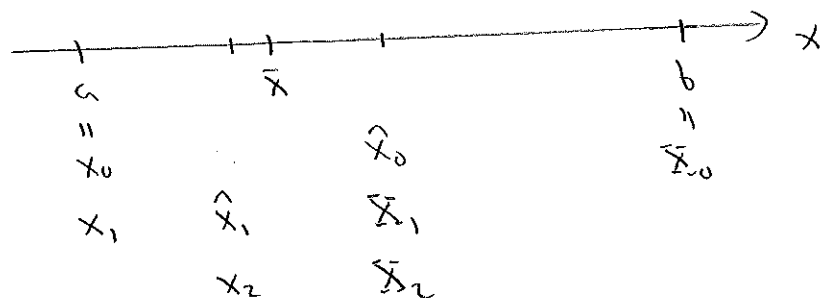
Kombinerade metoder

Ingen metod är bra på allt.

Men vi kan kombinera metoder
för att utnyttja deras styrkor.
och
svagheter

Ex. Antag att $f(a)f(b) < 0$.

Ta först några steg med bisektions-
metoden:



Välj sedan x_2 (eller $\hat{x}_2$) som
startvärde till Newtons metod.

Om Newton inte konvergerar: ta
några steg till med bisektion och
försök sedan igen.