

DATORÖVNING 5 — NUMERISK DERIVATA

Allmänt. Dokumentera ditt arbete i ett pdf-dokument. Spara detta så att du kan läsa på inför duggor och tentamen. Detta ger träning i att skriva matematik. Det är viktigt i sig. Men du ska se att skrivandet också hjälper dig att lära matematik. Detta är ännu viktigare. När man arbetar med att förbättra resonemanget och texten ökar man samtidigt förståelsen.

Datorövningarna examineras endast vid duggor (2–3) samt vid tentamen. Detta sker genom ett flertal frågor av typen: “Hur gjorde du det och det i MATLAB i Datorövning 3?” “Skissa den graf som du gjorde då.” “Vad är syftet med denna beräkning?”

Datorövningarna är alltså inga vanliga “laborationer” som man gör och redovisar i datorsal. Det är material som du jobbar med, dokumenterar och lär in, på Chalmers och hemma. Samarbete uppmuntras, men detta är inget grupparbete. Varje student måste göra sina egna datorprogram och sina egna dokument.

Spara alla filer och textdokument i en separat filkatalog för varje övning. Om ni sitter två vid samma dator under den schemalagda datorövningstiden, tänk på att ni båda sparar filerna i er egen filkatalog så att ni kan läsa på inför duggor och tentamen, där material från datorövningarna kommer att utgöra en väsentlig del.

Mål.

Beräkna derivata numeriskt med differenskvot.

Litteratur. [BM 6.1](#), Adams 4.7 (flyttal) (ej med i 6e uppl), 4.9 (4.7, 6e uppl)

Instruktioner. Skapa en ny filkatalog (“directory”) `studio-5` för denna övning.

Dokumentera allt ditt arbete i ett ordbehandlingsdokument. Exportera slutligen dokumentet till pdf-format. (Både MS Word och OpenOffice Writer stödjer detta.) Slutprodukten skall alltså vara pdf.

Vi skriver en funktionsfil `derivata.m` med anropet `y=derivata(f,x)` som beräknar en approximation av derivatan av f i punkten x . Funktionen ska användas i nästa studioövning som handlar om Newtons metod för lösning av $f(x) = 0$. Detta görs i flera steg i Uppgifterna 1–4 nedan.

Programmen finns i [Matlab/facit](#) om du behöver tips.

Introduktion. För detaljer, se [BM 6.1](#).

Låt $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ vara en deriverbar funktion (I är ett intervall). Derivatans definition är

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Det betyder att vi kan approximera derivatan med en differenskvot

$$(2) \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{med } h \approx 0.$$

Vi ska nu diskutera felet i denna approximation.

Från (1) förväntar vi oss att felet skall bli mindre och mindre när $h \rightarrow 0$. Med linjär approximation (Adams 4.9 (4.7, 6e uppl)) och Medelvärdessatsen kan också visas att för felet gäller,

$$(3) \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = \frac{1}{2} |f''(s)| h \leq \frac{1}{2} K_f h,$$

där s är ett (okänt) tal mellan x och $x+h$, och där K_f är en begränsning av f'' , dvs $|f''(x)| \leq K_f$, $x \in I$. Detta indikerar att felet är proportionellt mot h (t.ex. minskar med en faktor 10 när h minskar med en faktor 10) och att felet $\rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$.

I praktiken fungerar det dock inte så!

Det beror på att det finns ytterligare ett fel att ta hänsyn till, och det är att datorn räknar med flyttal med ändlig precision, dvs räknar med ändligt många siffror, vilket leder till avrundningsfel. I MATLAB, som räknar med cirka 16 siffror, kan vi antaga att varje beräknat funktionsvärde $f(x)$ är behäftat med ett fel $\delta_f \approx 10^{-15}$ (om $|f(x)| \approx 1$). Detta ger ett fel av storleksordningen $2\delta_f/h$, vid beräkning av differenskvoten i (2).

Vi har alltså två olika fel att ta hänsyn till:

- (1) Diskretiseringsfel: $\frac{1}{2}K_f h$
- (2) Fel pga beräkning med flyttal med ändlig precision: $2\delta_f/h$

Det totala felet kan därmed uppskattas med $\frac{1}{2}K_f h + \frac{2\delta_f}{h}$. Vi ser att den första termen i denna uppskattning minskar då h minskar medan den andra ökar. Vi får minimum då båda är lika (vilket känns intuitivt, och kan visas genom att derivera $\frac{1}{2}K_f h + \frac{2\delta_f}{h}$ m.p. h och sätta derivatan = 0):

$$(4) \quad \frac{1}{2}K_f h = \frac{2\delta_f}{h},$$

dvs

$$(5) \quad h^2 = \frac{4\delta_f}{K_f}, \quad h = 2\sqrt{\frac{\delta_f}{K_f}}.$$

Med detta optimala värde på h blir det minimala felet:

$$(6) \quad \frac{1}{2}K_f h + \frac{2\delta_f}{h} = K_f h = 2\sqrt{K_f \delta_f}.$$

I MATLAB med $\delta_f \approx 10^{-15}$ och $|f(x)| \approx 1$ och $K_f \approx 1$ (till exempel) får vi det optimala h -värdet:

$$(7) \quad h \approx 2\sqrt{\frac{\delta_f}{1}} \approx 2 \cdot 10^{-7.5} \approx 10^{-7},$$

vilket ger ett minimalt fel

$$(8) \quad 2\sqrt{1}\sqrt{\delta_f} \approx 10^{-7},$$

dvs vi får ungefär 7 korrekta decimaler.

Uppgifter.

1. Skriv en funktionsfil `derivata1.m` som implementerar den ensidiga differenskvoten i (2). Funktionen ska ha anropet `y=derivata1(f,x,h)`, där `f` är ett funktionshandtag.

Prova programmet med `f=@sin` och `x=pi/4`. Jämför med MATLABs `cos(pi/4)`. Obs att detta är också en approximation, men beräknad med högre noggrannhet.

2. Skriv en scriptfil `derivatatest.m` med en `for`-loop som genererar en lista av h -värden,

$$h = (10^{-1}, \dots, 10^{-16}).$$

För varje $h(i)$ beräknas approximativa derivatan $Df(i)$ och absolutbeloppet av felet

$$e(i) = |Df(i) - \cos(\pi/4)|.$$

Alltsammans presenteras i en tabell med h , Df , e i de tre kolumnerna. Tips: `a=[h', Df', e']` skapar en tabell.

Notera hur felet inledningsvis är proportionellt mot h , men att när h blir "för litet" så börjar felet växa igen!

Jämför med (7), (8).

En bättre approximation. Vi får en bättre approximation om vi ersätter den ensidiga differenskvoten i (2) med den symmetriska differenskvoten

$$(9) \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{med } h \approx 0.$$

Genom att använda en generalisering/förbättring av linjär approximation som kallas för Taylors formel (som vi kommer att studera i lp 2), kan visas att diskretiseringsfelet i detta fall begränsas av

$$(10) \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{6} M_f h^2,$$

där M_f är en begränsning av f''' : $|f'''(x)| \leq M_f$, $x \in I$.

Detta indikerar att felet är proportionellt mot h^2 (t.ex. minskar med en faktor 100 när h minskar med en faktor 10).

Men även i detta fall tillkommer ett fel pga att vi räknar med flyttal med ändlig precision. Vid beräkning av den symmetriska differenskvoten kan detta fel uppskattas med $\frac{\delta_f + \delta_f}{2h} = \frac{\delta_f}{h}$, där δ_f är som förut.

Det totala felet kan alltså i detta fall uppskattas med

$$(11) \quad \frac{1}{6} M_f h^2 + \frac{\delta_f}{h}.$$

Vi gör en överslagsberäkning för uppskattning av storleksordningen av det totala felet (11) baserad på antagandena $\delta_f \approx 10^{-15}$, $M_f \approx 1$. Det totala felet blir approximativt minimum då båda termerna är approximativt lika (vi bortser från faktorn 1/6),

$$(12) \quad h^2 \approx \frac{\delta_f}{h}, \quad h^3 \approx \delta_f, \quad h \approx \delta_f^{1/3} \approx 10^{-5},$$

och då blir minimala felet ungefär

$$(13) \quad h^2 \approx \delta_f^{2/3} \approx 10^{-10}.$$

Jämfört med (8) har vi cirka 3 decimaler noggrannare approximation av derivatan. Men man ska komma ihåg att (8) och (13) beror också på K_f och M_f , vilket kan påverka jämförelsen om någon av dessa är stor.

Uppgifter.

3. Gör samma undersökning (som i Uppgift 1 och 2) med den symmetriska differenskvoten i (9). Kalla funktionsfilen `derivata2.m`. Jämför med (12), (13).

4. När vi nu vet ungefär vilket h som är optimalt, så tar vi bort h från input-listan och bygger in $h = 10^{-5}$ i funktionsfilen. Spara `derivata2.m` som `derivata.m` och gör dessa ändringar. Funktionen ska nu ha anropet `y=derivata(f,x)`, där `f` är ett funktionshandtag. Spara filen, den ska användas i nästa studioövning.

Prova `derivata.m` genom att derivata $f(x) = 3x^3$ i $x = 2$. Detta kräver att du skriver en funktionsfil `funk.m` som implementerar funktionen $f(x) = 3x^3$. Beräkna och plotta derivatan på intervallet $[-3, 3]$.

/stig