

Övningstentamen 2, TMV225/176 Inledande matematik M/TD, ht 2012

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7 × 2 p = 14 p)
- (a) Beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ och $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
- (b) För vilka komplexa tal z gäller att $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och $|z| = 9$.
- (c) Bestäm en approximation till $\sqrt[3]{9}$ genom att linjärisera kring lämplig punkt. Svara på bråkform.
- (d) Beräkna $f'(1)$ då $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$.
- (e) Skriv ned definitionen av att en funktion f är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall I .
- (f) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+e^x)^2}{3e^{2x}}$.
- (g) Skriv ned hur man plottar grafen till funktionen $f(x) = \frac{(x+e^x)^2}{3e^{2x}}$ på intervallet $[0, 20]$ med hjälp av MATLAB. (Skriv alla kommandon och filer som behövs.)
2. Bestäm det minsta avståndet från origo till skärningslinjen mellan de två planen $x + y - z = 0$ och $y + 2z = 6$. (6 p)
3. (a) Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$ (2 p)
- (b) Bevisa att: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (4 p)
4. (a) Visa att funktionen $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ är injektiv, rita dess graf samt ange dess definitions- och värdemängd. (3 p)
- (b) Bestäm den inversa funktionen $f^{-1}(x)$. Ange även den inversa funktionens definitions- och värdemängd. (3 p)
5. En duva släpps från en punkt C på en ö, som ligger 3 km rakt ut från en punkt B på stranden (vilken antas vara en rät linje). Duven flyger hem till sitt duvslag som är beläget vid en punkt A på stranden 8 km från B. Duven flyger först längs en rät linje över vattnet från C till en punkt S på stranden mellan B och A. Därefter fortsätter den och flyger längs stranden från S och hem till sitt duvslag vid A. Antag att det går åt dubbelt så mycket energi att flyga över vatten som över land. Vilken väg skall duvan välja för att minimera energiåtgången? (6 p)
6. I både (a) och (b) nedan kan du anta att funktionsfilen `derivata.m`, för beräkning av numerisk derivata, från datorövning 5 är given.
- (a) Skriv den funktionsfil `newton.m` som du gjorde i datorövning 6, dvs givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras Newtons metod på dessa data. (3 p)
- (b) Skriv nu en ny funktionsfil `nynewton.m` som givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementerar Newtons metod fast med följande förändringar: (3 p)
- (i) Stoppvillkoret byts ut mot villkoret att $|f(x_i)|$ skall vara mindre än den givna toleransen.
- (ii) I varje iterationssteg kontrolleras först om $|f'(x_i)| > 0.01$ innan kvoten $f(x_i)/f'(x_i)$ bildas. Om så inte är fallet avbryts funktionen.
7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I . (2 p)
- (b) Formulera medelvärdessatsen. (2 p)
- (c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ så är funktionen f strängt växande på intervallet I . (2 p)

Lycka till!