

**Övningstentamen 3, TMV225/176 Inledande matematik M/TD, ht 2012**

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

---

**1.** Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7 × 2 p = 14 p)

(a) Låt  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Dela upp vektorn  $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  i två komponenter  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  så att  $\mathbf{a}$  är parallell med  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{b}$  är vinkelrät mot  $\mathbf{v}$ .

(b) Lös olikheten  $\frac{x^2-x}{x-3} < 0$ .

(c) Beräkna  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

(d) Antag att  $f(1) = 2$  och  $f'(1) = 3$ . Beräkna  $g'(1)$  om  $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ .

(e) Lös ekvationen  $\ln(x+2) = \ln(x+1) + \ln(x)$ .

(f) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar numerisk derivata. Använd symmetrisk differenskvot och  $h = 10^{-5}$ .

(g) Ge ett exempel på en Cauchy-följd.

**2.** Låt  $l$  vara linjen  $x - 1 = z$ ,  $y = 1$ , och låt  $P_0 = (2, -2, 1)$ . Bestäm koordinaterna för  $P_0$ 's spegelbild i  $l$ . (6 p)

**3.** Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektion av en vektor  $\mathbf{u}$  på en vektor  $\mathbf{v}$ . Ange sedan hur denna kan användas för att lösa uppgift 1 (a). (6 p)

**4.** (a) Beskriv hur man härleder Newtons metod med hjälp av linjärisering. (2 p)

(b) Hur många reella rötter har ekvationen  $x^3 + 4x - 1 = 0$ ? Tips: Använd Bolzanos sats. (2 p)

(c) Skriv ned ett steg av Newtons metod för ekvationen  $x^3 + 4x - 1 = 0$  med startpunkt  $x_0 = 1$ , dvs beräkna  $x_1$ . (2 p)

**5.** Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ . Ange eventuella extremvärden, inflexionspunkter och konkavitet. (6 p)

**6.** (a) Skriv ned definitionen av att en funktion  $f$  är kontinuerlig i en punkt  $a$ . (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att en funktion  $f$  är deriverbar i en punkt  $a$ . (1 p)

(c) Bevisa att om  $f$  är deriverbar i  $a$ , så är  $f$  också kontinuerlig i  $a$ . Ge ett exempel som visar att motsatsen ej gäller. (4 p)

**7.** (a) Formulera kontraktionsavbildningssatsen och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Redogör för den del av beviset som visar att (2 p)

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

(c) Visa att förutsättningarna i satsen är uppfyllda för fixpunktsekvationen  $x = g(x) = \frac{x^3+2}{5}$  på intervallet  $I = [0, 1]$ . (2 p)

*Lycka till!*