

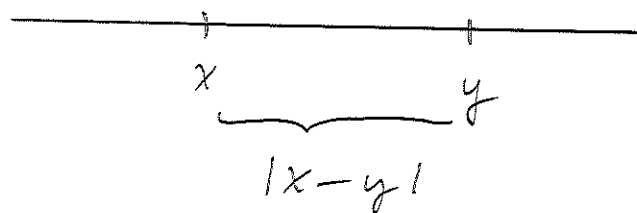
* Idag: Algebraiska räkningar

F1 (RP kap 1)

* Absolutbelopp

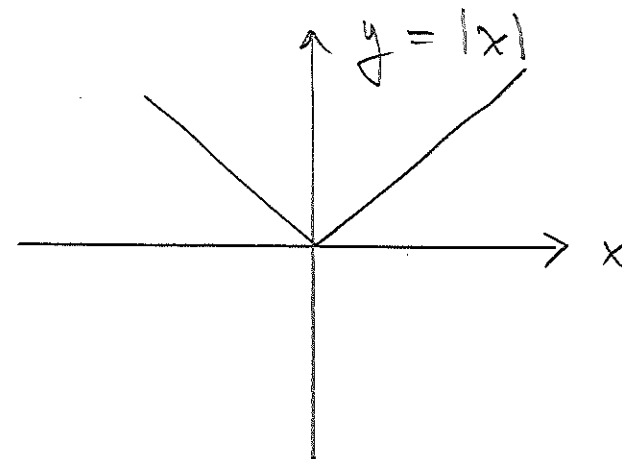
$|x|$ = avståndet till 0

$|x-y|$ = avståndet mellan x och y



Definition:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$



Egenskaper:

$$\begin{cases} |-x| = |x| \\ |xy| = |x| \cdot |y| \\ \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \\ |x \pm y| \leq |x| + |y| \text{ (triangelolikheten)} \end{cases}$$

Övning: Visa att

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

* Ekvationer med absolutbelopp

Dela upp i fall!

Exempel:

$$|2x - 3| > 1$$

"ekvivalent
med"Fall 1:

$$\Leftrightarrow 2x - 3 > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x > 4$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Fall 2:

$$2x - 3 < -1$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

"därför"

"eller"

$$\therefore \underline{\underline{x > 2 \vee x < 1}}$$

Alternativt svar:

$$\underline{\underline{(-\infty, 1) \cup (2, \infty)}}$$

"union"

* Kvadratrötter $\sqrt{x}$ för $x > 0$ är den positiva lösningen y till ekvationen $y^2 = x$.Notera: (i) $\sqrt{x} \geq 0$

(ii) $y^2 = x \quad (x > 0)$

har två lösningar: $y = \pm \sqrt{x}$

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$

* FaktorsatsenOm $p = p(x)$ är ett polynom i x och $p(\bar{x}) = 0$ så är $(x - \bar{x})$ en faktor i p .

Exempel: $p(x) = x^3 - 9x + 10$

Vi noterar att $p(2) = 8 - 18 + 10 = 0$

$\Rightarrow p(x) = (x-2) \cdot q(x)$

Bestäm $q(x)$: (genom polynomdivision)

$$\frac{x^3 - 9x + 10}{x-2} = x^2 + \frac{r_1(x)}{x-2}$$

$\Rightarrow \cancel{x^3} - 9x + 10 = \cancel{x^3} - 2x^2 + r(x)$

$$r_1(x) = 2x^2 - 9x + 10$$

$$\frac{r_1(x)}{x-2} = \frac{2x^2 - 9x + 10}{x-2} = 2x + \frac{r_2(x)}{x-2}$$

$\Rightarrow r_2(x) = \cancel{2x^2} - 9x + 10 - \cancel{2x^2} + 4x$
 $= -5x + 10 = -5 \cdot (x-2)$

$\Rightarrow \frac{x^3 - 9x + 10}{x-2} = x^2 + 2x - 5$

$\Rightarrow x^3 - 9x + 10 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$

Kontroll:

$$(x-2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$$

$$= x^3 + \cancel{2x^3} - 5x - \cancel{2x^2} - 4x + 10$$

$$= x^3 - 9x + 10 \quad \underline{\text{ok!}}$$

Ta för vana att kontrollera era svar (om möjligt)!

Kompakt uträkning med "liggande stolen"

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2x - 5 \\ \hline x-2 & x^3 - 9x + 10 \\ & \underline{x^3 - 2x^2} \\ & 2x^2 - 9x + 10 \\ & \underline{2x^2 - 4x} \\ & -5x + 10 \\ & \underline{-5x + 10} \\ & 0 \end{array}$$

* Några viktiga faktoriseringar

$$(i) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(ii) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(iii) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(iv) \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(v) \quad a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ endast för udda } n!$$

* "Gissningstekniken" (för "riggade" tentauppgifter)

1. Gissa att $\bar{x} = \pm 1, \pm 2$ etc är en lösning
2. Dividera med $x - \bar{x}$
3. Upprepa!

* Logaritmer, exponenter

$$\begin{cases} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(a^p) = p \ln(a) & (3) \end{cases}$$

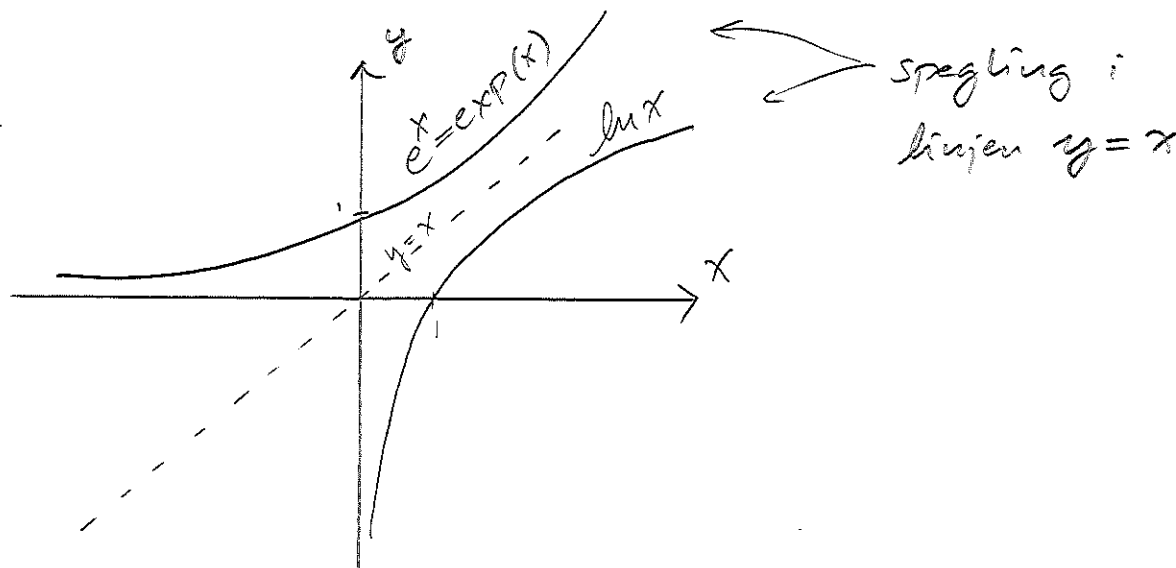
$$\begin{cases} e^A \cdot e^B = e^{A+B} & (1') \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^A / e^B = e^{A-B} & (2') \end{cases}$$

$$\begin{cases} (e^A)^p = e^{Ap} & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\ln a} = a, & a > 0 \\ \ln e^A = A, & A \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Övning: Visa ekvivalens mellan
(i) och (i') för $i=1,2,3$!



$\ln$ och $\exp$ är varandras inverser!

* Summabeteckning

$$\{a_k\}_{k=1}^n \quad \text{talföljd}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{summa}$$

* Aritmetiska och geometriska summor

Låt $\{a_k\}_{k=1}^n$ vara en
aritmetisk talföljd dvs

$$a_k - a_{k-1} = c = \text{konstant}$$

Då gäller att

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

Öving: Visa detta!

Exempel:

$$a_k = k$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1000} a_k &= 1 + 2 + \dots + 1000 = 1000 \cdot \frac{1 + 1000}{2} \\ &= 500 \cdot 1001 = \underline{\underline{500500}} \end{aligned}$$

Låt $\{a_k\}_{k=1}^n$ vara en
geometrisk talföljd, dvs

$$a_k / a_{k-1} = c = \text{konstant}$$

Då gäller att $a_k = a \cdot c^k$ och

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \overset{\text{Obs!}}{=} \sum_{k=0}^n a c^k = a \sum_{k=0}^n c^k$$

$$\overset{\text{Obs!}}{\uparrow} = \boxed{a \cdot \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}}$$

Öving: Visa detta!

Vi noterar att om $|c| < 1$, gäller
att $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$. Härav följer* att

$$\sum_{k=0}^{\infty} ac^k = \frac{a}{1-c}, \quad |c| < 1$$

Exempel:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} ac^k \\ &\quad \begin{array}{l} \nearrow a=1 \\ \searrow c=1/2 \end{array} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

* Vi kommer att diskutera detta i detalj i läsperiod 1!