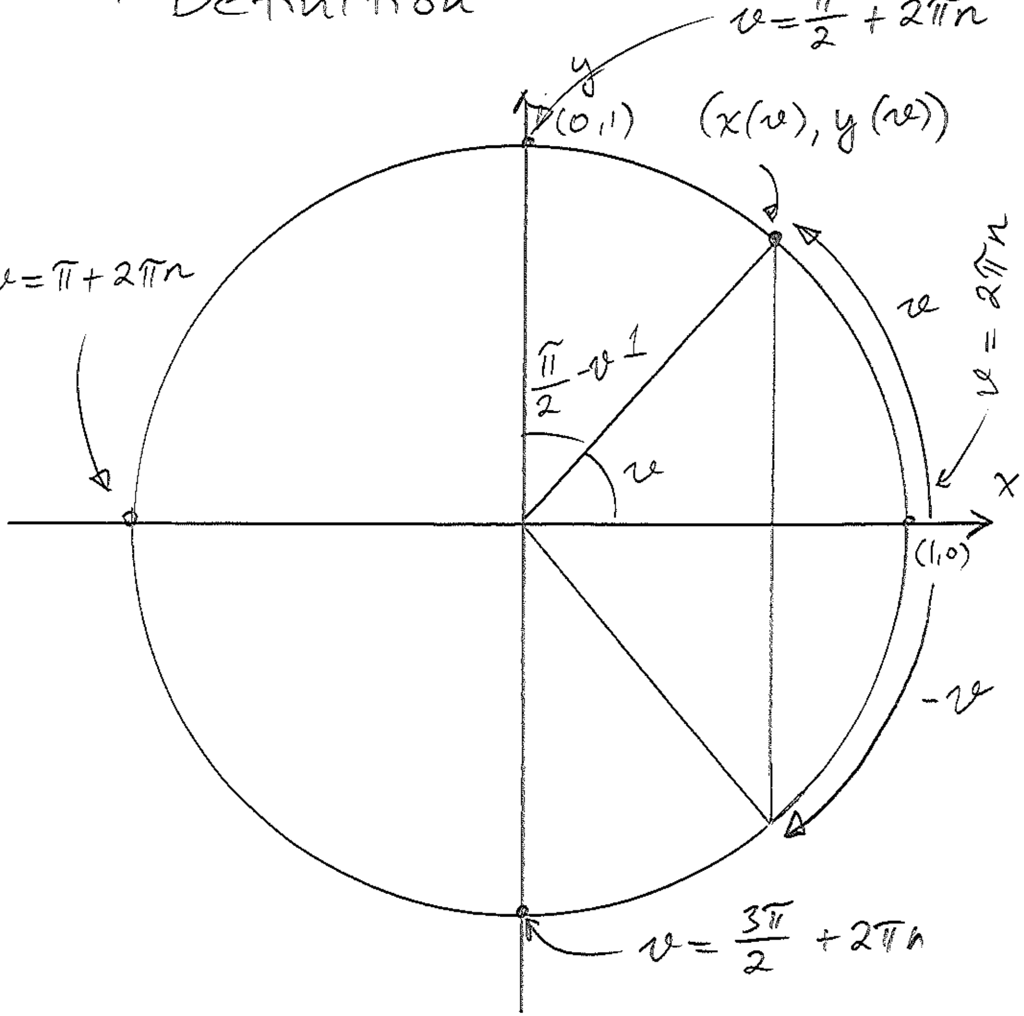
* Idag: Trigonometri

$\boxed{F2}$ (RP kap 2)

* Definition



v = vinkel = båglängd

Vi definierar:

$$\begin{cases} \cos(v) = x(v) \\ \sin(v) = y(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}, & \cos v \neq 0 \\ \cot v = \dfrac{\cos v}{\sin v}, & \sin v \neq 0 \\ \left(\sec v = \dfrac{1}{\cos v}, \right. & \left. \cos v \neq 0 \right) \\ \left(\csc v = \dfrac{1}{\sin v}, \right. & \left. \sin v \neq 0 \right) \end{cases}$$

Notera:

1/4 varv (90°) : $v = \pi/2$ ("radianer")

1/2 varv (180°) : $v = \pi$

3/4 varv (270°) : $v = 3\pi/2$

1 varv (360°) : $v = 2\pi$

* Grundläggande egenskaper

- cos är <u>jämn</u>:

$$\cos(-v) = \cos(v)$$

- sin är <u>udda</u>:

$$\sin(-v) = -\sin(v)$$

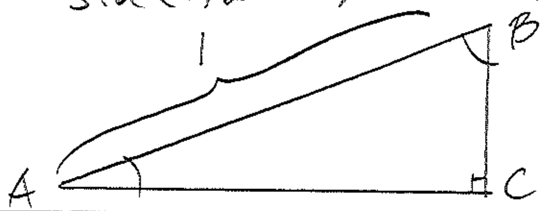
- sin, cos är 2π-periodiska:

$$\begin{cases} \sin(v + 2\pi n) = \sin(v) & \forall n \in \mathbb{Z} \\ \cos(v + 2\pi n) = \cos(v) & \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- vinkelkomplementära identiteter

$$\cos(\pi/2 - v) = \sin(v)$$
$$\sin(\pi/2 - v) = \cos(v)$$

komplement-vinklar



$$A + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin A = \cos B$$
$$\cos A = \sin B$$

- vinkelsupplementära identiteter

$$\begin{cases} \sin(\pi - v) = \sin(v) \\ \cos(\pi - v) = -\cos(v) \end{cases}$$

- trigonometriska ettan

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Samtliga dessa identiteter följer direkt ur figuren!

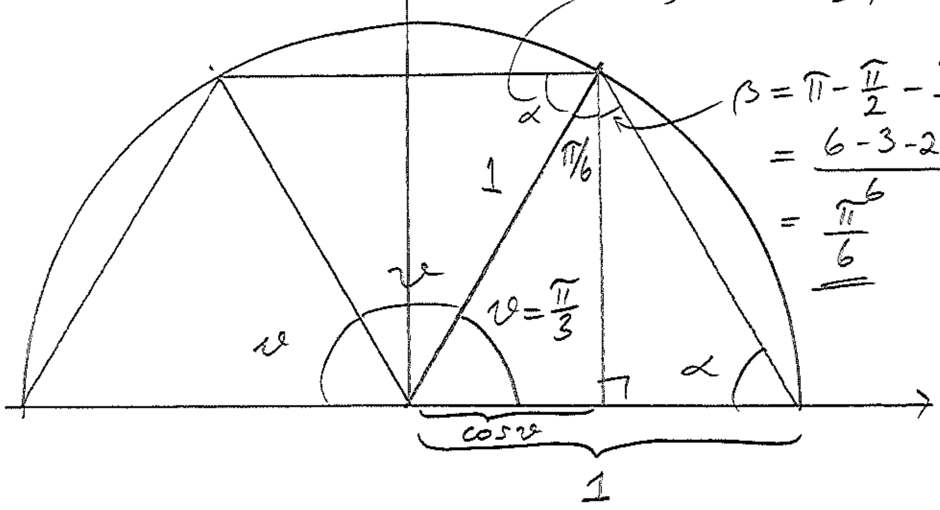
* Några speciella vinklar

v	$\sin v$	$\cos v$
0	0	1
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	1	0
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
π	0	-1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$

Bör kunnas!

$$\alpha = \left(\pi - \tfrac{\pi}{3}\right)/2 = \tfrac{2\pi}{3}/2 = \pi/3$$

$$\beta = \pi - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{6-3-2}{6}\pi = \underline{\tfrac{\pi}{6}}$$



Från figuren följer att triangeln är likbent.

$$\Rightarrow \quad \cos v = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

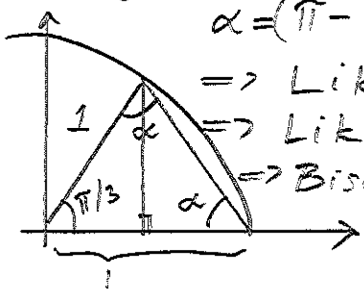
Enklare argument:

$$\alpha = (\pi - \pi/3)/2 = \pi/3$$

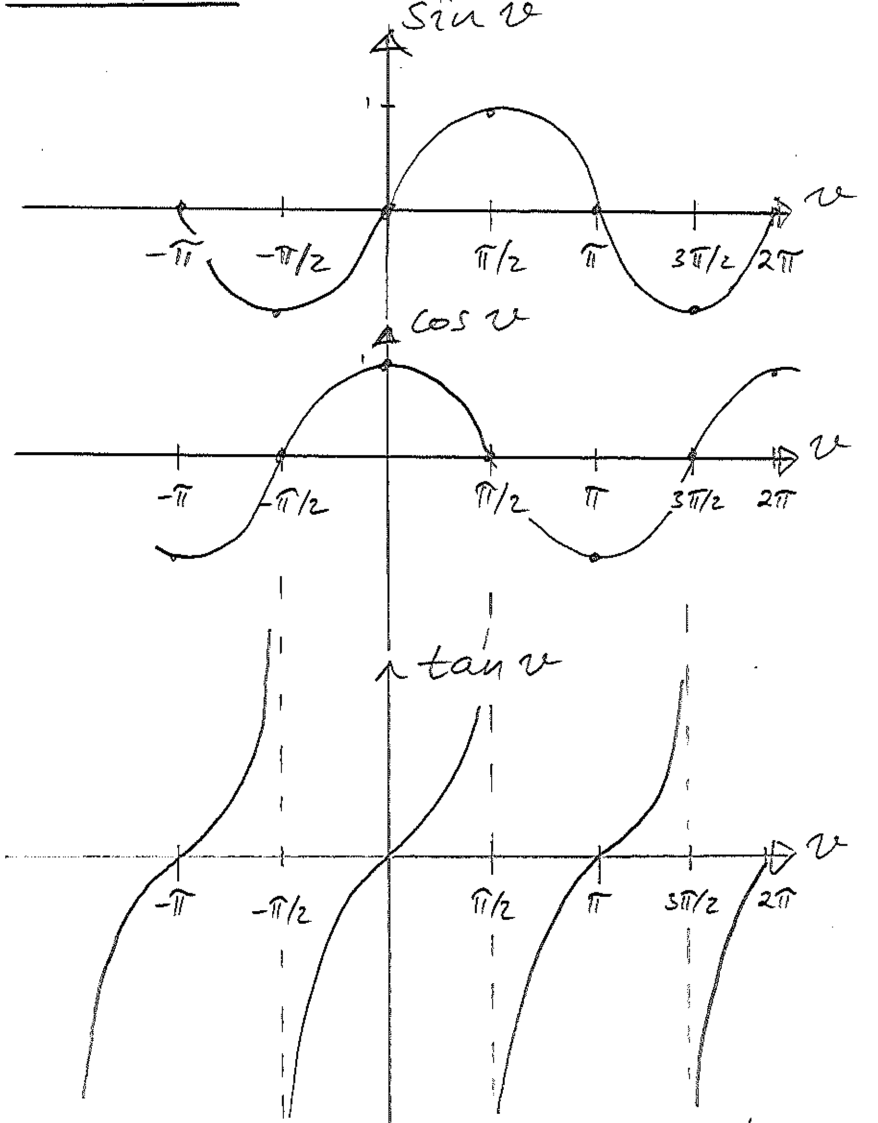
$\Rightarrow$ Liksidig triangel

$\Rightarrow$ Likbent med basen 1

$\Rightarrow$ Bisektris $\Rightarrow \underline{\underline{\cos v = \tfrac{1}{2}}}$



* Grafer



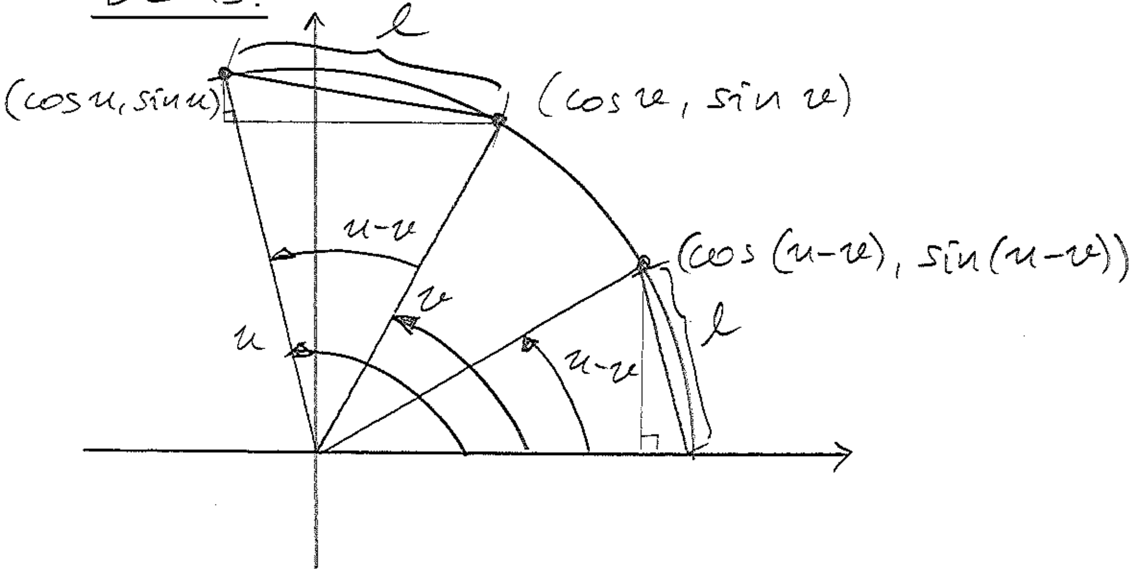
Notera: tan är udda
tan är π-periodisk

Övning: Visa detta!

* Additionsformler

Sats: $\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin v \cdot \sin v$

Bevis:



Avståndsformeln ger

$$l^2 = (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2$$

$$l^2 = (\cos(u-v) - 1)^2 + (\sin(u-v) - 0)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos^2 u} + \cancel{\cos^2 v} - \cancel{2}\cos u \cdot \cos v + \cancel{\sin^2 u} + \cancel{\sin^2 v} - \cancel{2}\sin u \sin v = \cancel{\cos^2(u-v)} \cancel{+1} - \cancel{2}\cos(u-v) + \cancel{\sin^2(u-v)}$$

$$\Rightarrow \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

VSV
QED

$\blacksquare$

Från de grundläggande egenskaperna följer nu:

$$\begin{cases} \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \, \sin v \\ \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \, \sin v \\ \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \, \sin v \end{cases}$$

Övning: Visa detta!

Memorera formeln för $\cos(u-v)$ och härled de övriga vid behov.

* Viktiga specialfall: dubbla vinkeln

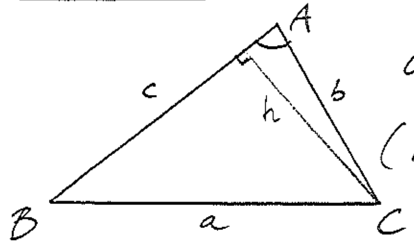
$$\begin{cases} \sin 2v = 2 \sin v \cdot \cos v \\ \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v \end{cases}$$

Kunna!

* Triangelsolvering (att "lösa" en triangel)

- För rätvinkliga trianglar: $\sin$, $\cos$, Pythagoras sats
- För allmänna trianglar: sinussatsen och cosinussatsen

* Sats: Cosinussatsen



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

(Notera: Pythagoras sats för $A = \pi/2$)

Bevis:

$$a^2 = (\overbrace{b \cdot \sin A}^{h})^2 + (c - b\cos A)^2$$

$$= b^2 \sin^2 A + c^2 + b^2 \cos^2 A - 2bc\cos A$$

$$= b^2 \underbrace{(\sin^2 A + \cos^2 A)}_{=1} + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \blacksquare$$

* **Sats:** Sinussatsen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bevis: (se figur på föregående blad)

$$h = b \cdot \sin A$$

$$h = a \cdot \sin B$$

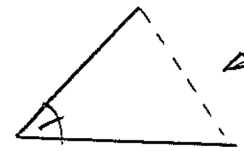
$$\Rightarrow \quad b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

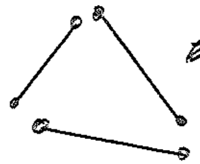
($\frac{\sin C}{c}$ visas på samma sätt)

* Villkor för lösbarhet

- Två sidor + mellanliggande vinkel

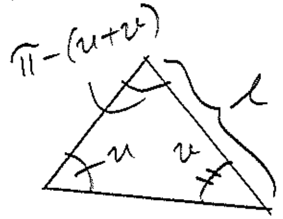


- Tre sidor

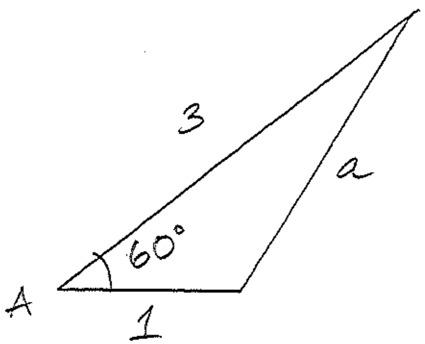


$(a < b + c)$

- Två vinklar och en sida



Exempel:



Cosinussatsen ger

$$a^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 9 + 1 - 6 \cdot 1/2$$

$$= 10 - 3 = 7$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a = \sqrt{7}}}$