

* Idag: Kontinuitet,
Lipschitz-kontinuitet

Adams / Essex 1.4

BM 2

* Gränsvärde (repetition)

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{f}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

Med andra ord:

$$\underbrace{\text{litet } \Delta x}_{< \delta(\varepsilon)} \Rightarrow \underbrace{\text{litet } \Delta y}_{< \varepsilon}$$

Mycket viktig definition!

* Exempel: Definition av derivata

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(om gränsvärdet existerar)

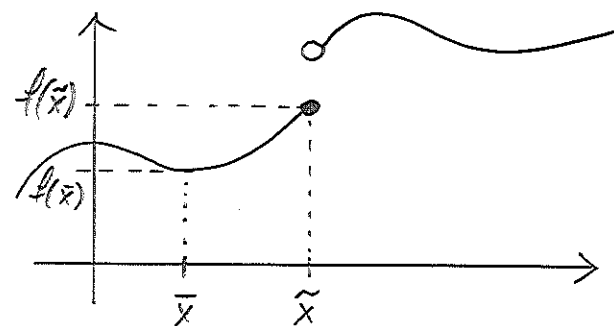
Mer om derivatan nästa vecka!

* Definition: Kontinuitet i en punkt

Funktionen f är kontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

Exempel:



f kontinuerlig i $\bar{x}$ men diskontinuerlig i $\tilde{x}$
(dock vänsterkontinuerlig - se nästa sida)

* Definition: Vänster/högerkontinuitet

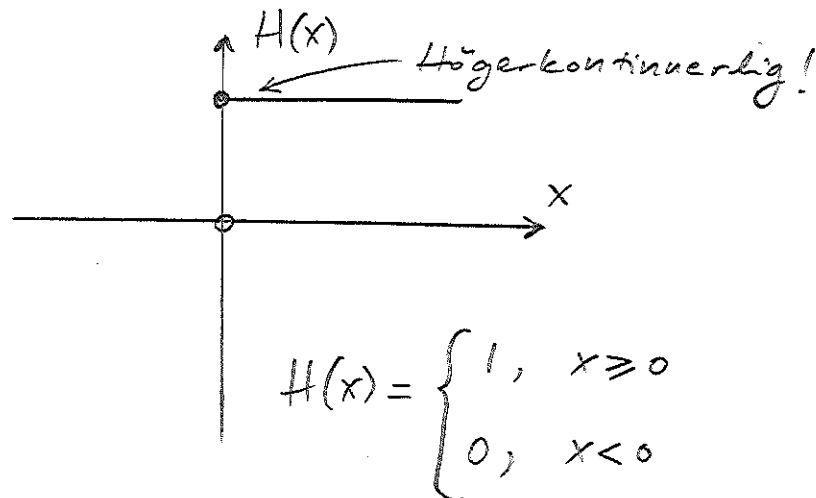
Funktionen f är högerkontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}+} f(x) = f(\bar{x})$$

Funktionen f är vänsterkontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}-} f(x) = f(\bar{x})$$

Exempel: Heavisides stegfunktion $H(x)$



* Definition: Kontinuitet på intervall

Funktionen f är kontinuerlig på intervallet I om den är kontinuerlig i alla $x \in I$.

* Definition: Kontinuitet

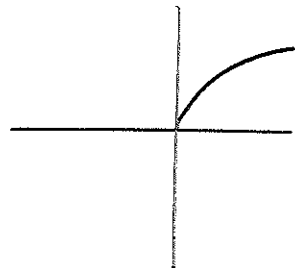
Funktionen f är kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla $x \in D(f)$.

Exempel: $f(x) = \sqrt{x}$

$$D(f) = [0, \infty)$$

Kontinuerlig!

(Ja, även i $x=0$)

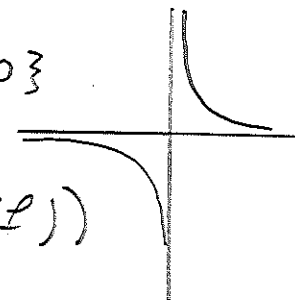


Exempel: $f(x) = 1/x$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Kontinuerlig!

(Ja, även om $0 \in D(f)$)



* Sats: Egenskaper för kontinuerliga funktioner

Om f och g är kontinuerliga i $\bar{x}$ så gäller att

1. $f+g$ är kontinuerlig i $\bar{x}$
2. $f-g$ är kontinuerlig i $\bar{x}$
3. fg är kontinuerlig i $\bar{x}$
4. αf är kontinuerlig i $\bar{x}$
5. f/g är kontinuerlig i $\bar{x}$ (om $g(\bar{x}) \neq 0$)
6. $f \circ g$ är kontinuerlig

Bevis: Följer av räkneregler för gränsvärden (1-4). 5 är en övningsuppgift i Adams/Essex (1.5.37)

* Notera: De flesta funktioner vi arbetat med är kontinuerliga: polynom, rationella funktioner, $x^{m/n}$, $\sin$, $\cos$, $|x|$, ...

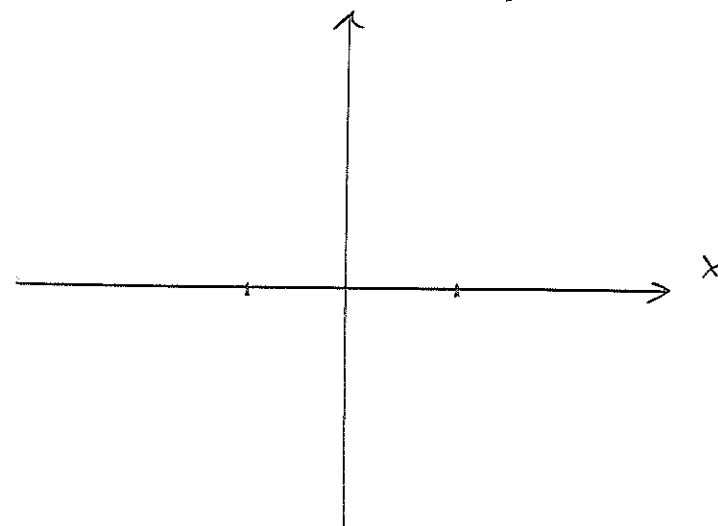
* Notera: Summan av diskontinuerliga funktioner kan bli kontinuerlig:

$$H(x) + (1 - H(x)) = 1$$

* Kontinuerlig extension

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$



$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x \cdot (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$$

Definiera

$$\tilde{f}(x) = \frac{x}{x+1} \quad D(\tilde{f}) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

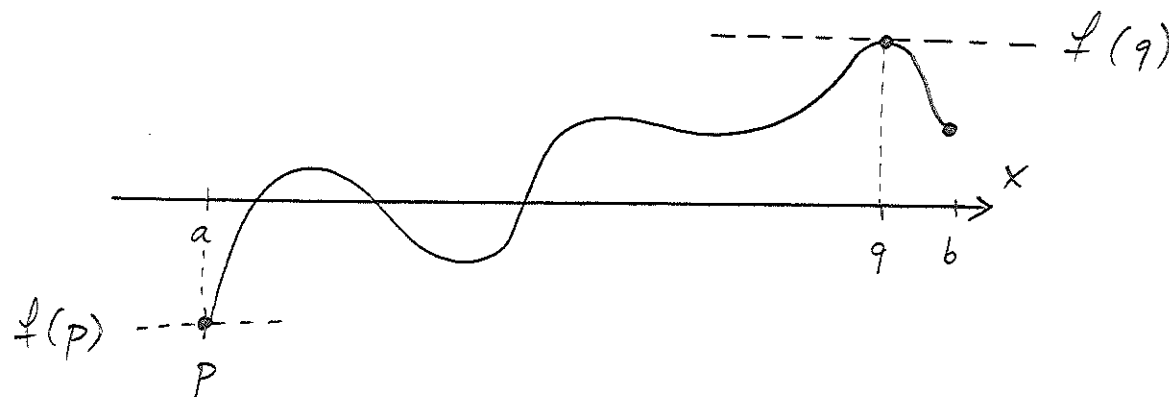
- $\tilde{f}$ är den kontinuerliga extensionen av f
 - $x = -1$ är en borttagbar diskontinuitet

* Tre viktiga satser om
kontinuerliga funktioner på
slutna, begränsade intervall.
kompakta

Sats: Största och minsta värde

Om funktionen f är kontinuerlig
på det slutna, begränsade intervallet
 $[a, b]$ så har f ett största och
minsta värde på $[a, b]$:

$$\exists p, q \in [a, b] : f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b]$$

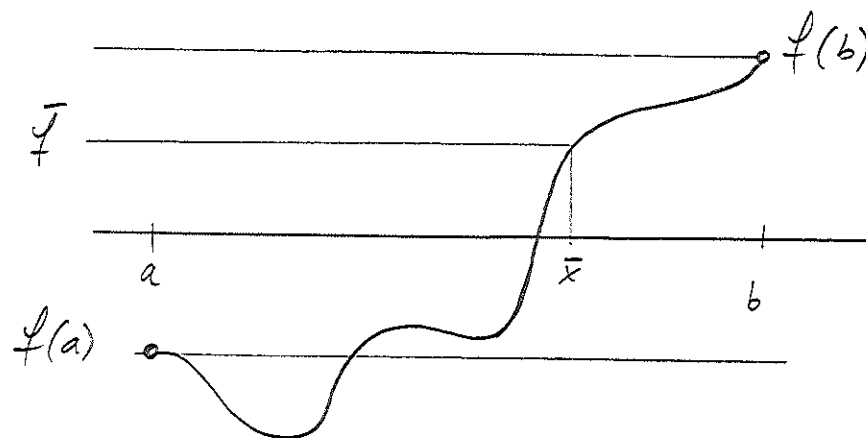


Sats: Mellanliggande värden

Om funktionen f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[a, b]$ så antar den alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$:

$$\forall \bar{f} \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$$

$$\exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \bar{f}.$$



En direkt följd (specialfall) är Bolzano's sats: Om f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och $f(a) \cdot f(b) < 0$ (olika tecken), så skär grafen x -axeln i någon punkt mellan a och b .

* Dessa satser är till synes självklara,
men svåra att bevisa!

Vi kommer därför införa en mer
kraftfull definition av kontinuitet,
nämligen Lipschitz-kontinuitet!

* Definition: Lipschitz-kontinuitet

Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig
på intervallet I om

$$\exists L > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

- Kvantitativ definition av kontinuitet
- Mycket enklare att jobba med
- Mycket mer kraftfull (eftersom vi anser mer)
- Lipschitz-kontinuitet $\Rightarrow$ kontinuitet
men kontinuitet $\nRightarrow$ Lipschitz-kontinuitet

(inte ens på slutet begränsat intervall: $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $x \in [0, 1]$)