

* Idag: Lipschitz-kontinuitet
Bisektion

BM 2, (BM 4)

* Definition: Lipschitz-kontinuitet

Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I om

$$\exists L > 0: |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

- Starkare krav än kontinuitet
- Kvantitativt, mer kraftfullt
- Med andra ord:

$$|\Delta y| \leq L_f |\Delta x|$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq L_f \quad \left(\begin{array}{l} \sim \text{begränsad} \\ \text{derivata man} \\ \text{behöver ej vara} \\ \text{deriverbar: } f(x) = |x| \end{array} \right)$$

* Sats: Lipschitz-kontinuitet $\Rightarrow$ kontinuitet

Beris:

Antag att f är Lipschitz på I

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Skall visa att

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

dvs:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(\bar{x})}| < \varepsilon$$

Eftersom f är Lipschitz gäller att f

$$\therefore |f(x) - f(\bar{x})| \leq L_f \underbrace{|x_1 - x_2|}_{< \delta} < L_f \delta$$

$$\therefore |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \quad \text{om} \quad L_f \delta < \varepsilon$$

$$\therefore \text{Tag } \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon / L_f.$$

$\therefore f$ är kontinuerlig!



* Notera: Det omvända gäller inte,
dvs kontinuitet $\nRightarrow$ Lipschitz-kontinuitet
dvs $\exists f : f$ kontinuerlig men ej Lipschitz
Räcker att hitta ett motexempel.

Tag $\boxed{f(x) = \sqrt{|x|}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

så f är kontinuerlig.

Men:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| ?$$

Tag $x_1 = x, x_0 = 0$:

$$|f(x) - 0| \leq L_f |x - 0|$$

$$|f(x)| \leq L_f |x|$$

$$\sqrt{|x|} \leq L_f |x|$$

$$|x| \leq L_f^2 |x|^2 \quad (x \neq 0)$$

$$L_f^2 \geq 1/|x|$$

$\Rightarrow L_f$ tvingas att vara
oändligt stor eftersom $|x|$
kan bli oändligt litet!

$\therefore f$ är ej Lipschitz-kontinuerlig

(Däremot är den Hölder-kontinuerlig...)

Övning: Visa att $f(x) = x^\alpha$ inte
är Lipschitz-kontinuerlig
på $[0,1]$ för $0 < \alpha < 1$.

Övning: Visa att $f(x) = x^\alpha$
är Lipschitz-kontinuerlig
på $[\varepsilon, 1]$ för $0 < \alpha < 1$.

↑
litet tal vilket som
helst (inte det i
definitionen!)

* Exempel: $f(x) = x^2$ $I = [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2|$$

$$= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)|$$

$$= |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq (|x_1| + |x_2|) \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \underbrace{2 \cdot \max(|a|, |b|)}_{= L_f} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore L_f = 2 \max(|a|, |b|)$$

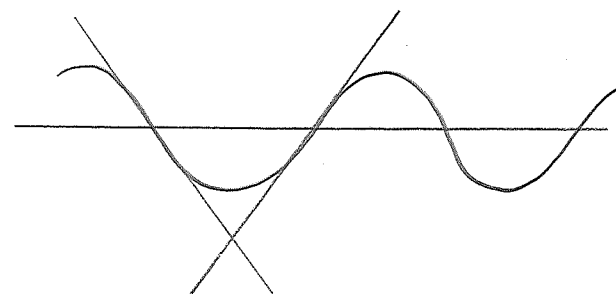
* Exempel: $f(x) = \sin x$ $I = (-\infty, \infty)$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin(x_1) - \sin(x_2)|$$

$$= \left| \frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot (x_1 - x_2) \right|$$

$$= \left| \frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \cdot |x_1 - x_2|$$

$\frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2}$ är lutningen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



Blir som störst 1!

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| \leq \underbrace{1}_{L_f} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore \underline{\underline{L_f = 1}}$$

Vi skall senare visa att

$$L_f \leq \max |f'|$$

$$(\quad = \max |\cos x| = 1)$$

* Sats: En Lipschitz-kontinuerlig funktion på ett begränsat intervall är begränsad

Beris: (Supereuklekt!)

Tag $\bar{x} \in I$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x)| &= |f(x) - f(\bar{x}) + f(\bar{x})| \\ &\leq |f(x) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x})| \\ &\leq L_f \cdot \underbrace{|x - \bar{x}|}_{\leq |I|} + |f(\bar{x})| \\ &\leq L_f \cdot |I| + |f(\bar{x})| < \infty. \end{aligned}$$



Notera: Viktigt att intervaller är begränsat!

$f(x) = x$ Lipschitz på $(-\infty, \infty)$

men ej begränsad!

* Sats: Egenskaper för Lipschitz-kontinuerliga funktioner

Om f och g är Lipschitz-kontinuerliga på I med konstanter L_f och L_g och f och g är begränsade med $|f(x)| \leq M_f$, $|g(x)| \leq M_g$ så gäller att

1. $f+g$ Lipschitz med $L = L_f + L_g$
2. $f-g$ Lipschitz med $L = L_f + L_g$
3. fg Lipschitz med $L = M_f L_g + M_g L_f$
4. αf Lipschitz med $L = |\alpha| L_f$
5. f/g Lipschitz med $L = \frac{M_f L_g + M_g L_f}{\alpha^2}$
om $|g(x)| \geq \alpha > 0$.
6. $f \circ g$ Lipschitz med $L = L_f L_g$

Beris: (Av 3)

$$|(fg)(x_1) - (fg)(x_2)| = |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)|$$

$$= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)|$$

↑ lägg till och dra ifrån - bra trick!!!

$$\leq |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)| + |f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)|$$

↑ triangelolikheten - bra olikhet!!!

$$= \underbrace{|f(x_1)|}_{\leq M_f} \cdot \underbrace{|g(x_1) - g(x_2)|}_{\leq L_g |x_1 - x_2|} + \underbrace{|g(x_2)|}_{\leq M_g} \cdot \underbrace{|f(x_1) - f(x_2)|}_{\leq L_f |x_1 - x_2|}$$

$$= M_f L_g \cdot |x_1 - x_2| + M_g L_f \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= \underbrace{(M_f L_g + M_g L_f)}_{= L} \cdot |x_1 - x_2|$$

Kanske de trå
varest användbara
knepet!



* Vi har denna vecka bekantat oss med

- Gränsvärden: $\lim, \varepsilon - \delta$
- Kontinuitet: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$
- Lipschitz-kontinuitet:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|$$

Vi kommer att använda Lipschitz-kontinuitet för att konstruera och analysera iterativa (numeriska) metoder för att lösa ekvationer:

- Bisektion $\rightarrow$ Praktisk metod
 $\rightarrow$ Bevis av Bolzaans sats
- Fixpunktsiteration
- Newtons metod $\uparrow$ en typ av