

*Idag: Bisektion
Reella tal
Cauchy-följder

Varning:

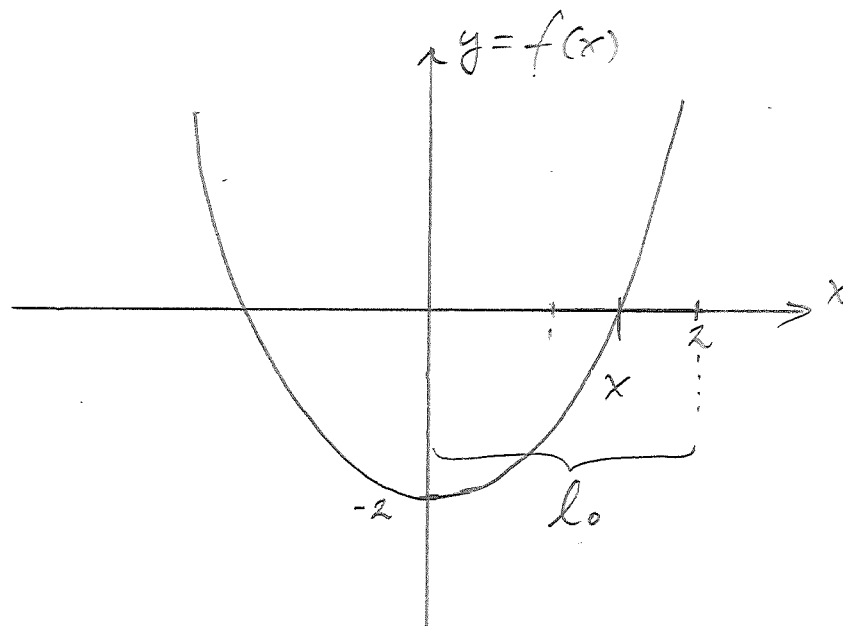
Dagens material kräver mycket eftertanke!

* Bisektion (exempel)

Lös ekvationen $x^2 = 2$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2 = 0$$

(Vi vet att $x \in \mathbb{Q}$)



- Vi vet att $x \in [a, b] = [0, 2]$ (se figur)

- Dela intervallet på mitten och kolla ändpunkterna:

$$f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0$$

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$$

lösningen finns här
mellan $x=1$ och $x=2$!

$\Rightarrow$ Nytt intervall $[a, b] = [1, 2]$

- Dela upp och kolla ändpunkter:

$$f(1) = -1 < 0 \quad (\text{vet vi})$$

$$f(1.5) = 0.25 > 0 \quad \leftarrow \text{lösningen finns här}$$

$$f(2) = 2 > 0 \quad (\text{vet vi})$$

- Tag $[a, b] = [1, 1.5]$

- Dela upp och kolla ändpunkter:

$$f(1) = -1 < 0 \quad (\text{vet vi})$$

$$f(1.25) = -0.4575 < 0 \quad \leftarrow \text{lösningen finns här}$$

$$f(1.5) = 0.25 > 0 \quad (\text{vet vi})$$

- Tag $[a, b] = [1.25, 1.5]$

$\therefore$ Vi har beräknat att

$$1.25 < \sqrt{2} < 1.5$$

Om vi fortsätter kan vi bestämma lösningen hur noggrant vi vill!

På detta sätt skapar vi två st. talföljder:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots = 0, 1, 1, 1.25, \dots$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots = 2, 2, 1.5, 1.5, \dots$$

där $x_i = a_i$ och $x_i = b_i$

Notera:

$$|x_i - x_i| = l_0 \cdot 2^{-i}$$

Naturliga frågor:

① Vad är

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i ?$$

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i ?$$

(och existerar gränsvärdena?)

②. Vad är

$$f(\bar{x}) ?$$

$$f(\bar{X}) ?$$

Vi börjar med att besvara fråga

② - ur ① kräver mer eftertanke!

* Fråga ②:

Eftersom f är Lipschitz-kontinuerlig och därigenom kontinuerlig gäller att

$$f(\bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(\bar{x})| &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f(x_i)| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} -f(x_i) < \lim_{i \rightarrow \infty} f(\bar{X}) - f(x_i) \end{aligned}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} |f(\bar{X}) - f(x_i)|$$

$$\leq \lim_{i \rightarrow \infty} L_f \cdot |\bar{X} - x_i|$$

$$= L_f \cdot \underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{X} - x_i|}_{=0} = L_f \cdot 0 = 0.$$

$$\therefore f(\bar{x}) = 0$$

Alltså löser gränsvärdens ekvationen, om de existerar!
 Vet vi ännu inte!

På samma sätt visar vi att $f(\bar{X}) = 0$.

Tillbaka till fråga 1! För att svara behöver vi tänka (djupt och länge!) på vår definition av reella tal.

* Svar på Fråga ① (alt. 1)

På föreläsning 1 skrev vi ner följande axiom för $\mathbb{R}$:

Varje uppåt begränsad icke-tom delmängd S av $\mathbb{R}$ har en övre begränsning i $\mathbb{R}$.

Härrar följer (relativt enkelt) följande
sats: (monotona konvergenssatsen)

Varje uppåt begränsad och monotont
 växande talföljd i $\mathbb{R}$ har ett gränsvärde.

Härrar följer direkt att

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x} \quad (\text{uppåt begränsad})$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{x}_i = \underline{\bar{x}} \quad (\text{nedåt begränsad})$$

Existerar och vi har redan sett att

$$f(\bar{x}) = f(\underline{\bar{x}}) = 0$$

$$\text{Alltså: } \bar{x} = \underline{\bar{x}} = \sqrt{2}.$$

Vi kommer att fokusera på en
 alternativ definition av $\mathbb{R}$ och ett
 alternativt svar på Fråga 1!

* Svar på Fråga ① (alt 2)

Vi noterar att talföljderna $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ och
 $\{\underline{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ genererar decimalutvecklingar.

I varje steg krymper avståndet med
 en faktor 2

$\Rightarrow$ I vart tredje / fjärde steg ($2^3 = 8 \approx 10$)
 får vi en ny decimal:

$$x_0 = 0.0000 \dots$$

$$x_1 = 1.0000 \dots$$

$$x_2 = 1.2500 \dots$$

$$x_3 = 1.3750 \dots$$

$$x_4 = 1.3750 \dots$$

$$x_5 = 1.4062500 \dots$$

$\vdots$

Ej kopplat speciellt till just
decimalutvecklingar. Essensen är att
avståndet mellan x_i och alla efterföljande
tal x_j för $j > i$ blir mindre och mindre
 ju större i tar i!

En talföljd som uppfyller det kallas
 för Cauchy-följd:

Definition: Cauchy-följd

En talföljd $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ kallas Cauchy-följd
 om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon.$$

(Löst talat: Cauchy-följd $\sim$ decimalutveckling)

Vi definierar $\mathbb{R}$ som
 "mängden av alla Cauchy-följder
 av rationella tal" (egentligen
 "ekvivalensklasser" av Cauchy-
 följder).

Två Cauchy-följder anses lika
 om skillnaden konvergerar mot 0,
 dvs $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ om $x_i - y_i \rightarrow 0$.

Exempel:

$$1 " = " \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$2 " = " \{2, 3, 5, 11, 2, 2, 2, 2, \dots\}$$

$$2 " = " \{2, 2, 2, \dots\}$$

$$\sqrt{2} " = " \{0, 1, 1.25, 1.375, \dots\}$$

(Behöver visa att denna definition
 av $\mathbb{R}$ uppfyller egenskaperna för att
 vara en "ordnad kropp" - men det
 lämnas som övning för den
 intresserade!)

* Vi kan nu svara på Fråga ①:

$$|x_i - x_j| < |x_i - \bar{x}_j| < |x_i - \bar{x}|$$

$$= l_0 \cdot 2^{-i} < \varepsilon$$

$$\text{om } i > N = \log_2(l_0/\varepsilon).$$

$\Rightarrow \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ är en Cauchy-följd

$\Rightarrow \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ konvergerar mot (är!) ett reellt tal !!!

Övningar:

* Visa att $\{z_i\}$ är en Cauchy-följd
om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder
och $z_i = x_i y_i$.

$$\left(\begin{aligned} z_i - z_j &= x_i y_i - x_j y_j \\ &= (x_i y_i - x_j y_i) + (x_j y_i - x_j y_j) \end{aligned} \right)$$

* Visa att $\{z_i\}$ är en Cauchy-följd
om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder
och $z_i = x_i / y_i$ om $|y_i| \geq \alpha > 0 \forall i$.

* Visa att om $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$ så är
 $\{x_i\}$ en Cauchy-följd.