

* Idag: Bisektion,
reella tal,
Cauchy-följder

* Vi har sett att den allmänna
ekvationen

$$f(x) = 0$$

kan lösas med bisektion.

- Genererar en Cauchy-följd,
dvs

$$|x_i - x_j| \rightarrow 0 \text{ då } i, j \rightarrow \infty$$

eller (mer precist):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon$$

- Cauchy-följder definierar
reella tal, så bisektion konvergerar.

* Definition: Konvergent talföljd

Talföljden (sekvensen) $\{x_i\}$

konvergerar mot $\bar{x}$ om

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: i > N \Rightarrow |x_i - \bar{x}| < \varepsilon)$$

* Exempel (på Cauchy-följder)

$$1. x_i = 1 \quad \forall i, \text{ dvs } 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$\Rightarrow |x_i - x_j| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

Tag $N \in \mathbb{N}$ (vilket som helst)

$\therefore$ Cauchy-följd

$$2. x_i = \begin{cases} 2, & i < 100 \\ 3, & i \geq 100 \end{cases}$$

dvs 2, 2, 2, ..., 2, 3, 3, ...

$$\Rightarrow |x_i - x_j| = 0 < \varepsilon \text{ för } N \geq 100$$

$\therefore$ Cauchy-följd

$$3. x_i = i, \text{ dvs } 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$\Rightarrow |x_i - x_j| = |i - j| \notin \varepsilon$$

om $i \neq j$ och säg $\varepsilon = 1/2$

$\therefore$ Ej Cauchy-följd

$$4. x_i = 1/i, \text{ dvs } 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

$$\Rightarrow |x_i - x_j| = |1/i - 1/j| \leq \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

↑
triangelolikheten

$$\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} \rightarrow 0 \text{ då } N \rightarrow \infty$$

$$(N > 2/\varepsilon \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon)$$

* Sats: Konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy

En talföljd är konvergent om
den är en Cauchy-följd. "Om och endast om"

Beris:

(i) Antag att talföljden är konvergent.

$$\exists x : \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$$

dvs

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : i \geq N \Rightarrow |x_i - \bar{x}| < \varepsilon$$

Tag nu $\tilde{N} = N(\varepsilon/2)$, dvs låt $\tilde{N}$
vara det tal som gör att

$$i \geq \tilde{N} \Rightarrow |x_i - \bar{x}| < \varepsilon/2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_i - x_j| &= |x_i - x + x - x_j| \\ &\leq |x_i - x| + |x - x_j| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

om $i, j \geq \tilde{N}$. $\therefore \{x_i\}$ är en Cauchy-följd.

(ii) Antag att talföljden är en Cauchy-följd.

Då följer per definition att den representerar (är) ett reellt tal $\bar{x}$.

* Bisektionsalgoritmen

(Vi såg på specialfall: $f(x) = x^2 - 2$ på förra föreläsningen.)

Uppgift: Lös $f(x) = 0$

Förutsättningar: - f kontinuerlig på $[a, b]$

$$- f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{slutet och} \\ \text{begränsat} \end{array}$$

$$- \text{tolerans } TOL > 0$$

Algoritmen:

$$\text{Låt } x_0 = a$$

$$\text{Låt } \bar{x}_0 = b$$

$$\text{Låt } i = 0$$

Upprepa tills $|x_i - \bar{x}_i| < TOL$

$$\text{Låt } \hat{x}_i = \frac{x_i + \bar{x}_i}{2}$$

$$\text{Om } f(\hat{x}_i) = 0,$$

Stoppa upprepning

$$(\text{annars}) \text{ Om } f(x_i) \cdot f(\hat{x}_i) < 0,$$

$$\text{Låt } x_{i+1} = x_i$$

$$\text{Låt } \bar{x}_{i+1} = \hat{x}_i$$

$$(\text{annars}) \text{ Om } f(\hat{x}_i) \cdot f(\bar{x}_i) < 0$$

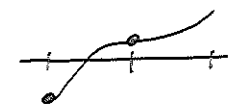
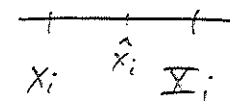
$$\text{Låt } x_{i+1} = \hat{x}_i$$

$$\text{Låt } \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i$$

$$\text{Låt } i = i + 1$$

$$\text{Låt } \hat{x} = \frac{x_i + \bar{x}_i}{2}$$

Klart!



Algoritmen kan enkelt implementeras i MATLAB:

```

X = a
X_bar = b
i = 0
while abs(X - X_bar) ≥ TOL
    x_hat = (X + X_bar) / 2
    if f(x_hat) == 0
        break
    elseif f(X) * f(x_hat) < 0
        (X = x_hat)
        X_bar = x_hat
    elseif f(x_hat) * f(X_bar) < 0
        X = x_hat
        (X_bar = X_bar)
    end
end
x_hat = (X + X_bar) / 2

```

Vi använder nu algoritmen för att bevisa Bolzaanos sats.

* Sats: Bolzaanos sats

Om funktionen f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet

$[a, b]$ och $f(a) \cdot f(b) < 0$

(olika tecken), så skär grafen

x -axeln i någon punkt mellan a och b , dvs

$$\exists \bar{x} \in (a, b) : f(\bar{x}) = 0.$$

Notera:

- Gäller om f är kontinuerlig men vi kommer att anta Lipschitz-kontinuitet
- $\bar{x}$ ligger i det öppna intervallet (a, b) (fundera på varför det inte är slutet!)

Bevisidé:

- (i) Konstmera en algoritm som genererar en talföljd $\{x_i\}$
- (ii) Visa att $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd så att $\exists \bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$
- (iii) Visa att $f(\bar{x}) = 0$

Bevis: (Kommer definitivt på bevislistan!)

- (i) Använd bisektionsalgoritmen!
- (ii) Bisektionsalgoritmen ger två talföljder $\{x_i\}$, $\{X_i\}$ som uppfyller
- $$|x_i - X_i| = X_i - x_i = (b-a) \cdot 2^{-i}$$
- $$\Rightarrow |x_i - x_j| = x_j - x_i \leq X_j - x_i \leq X_j - X_i$$
- ↑
antag $j \geq i$
- $$= (b-a) \cdot 2^{-i} \rightarrow 0 \text{ då } i \rightarrow \infty.$$

 $\therefore \{x_i\}$ är en Cauchy-följd.(gäller även $\{X_i\}$) $\Rightarrow \{x_i\}$ konvergerar mot $\bar{x} \in (a, b)$.

- (iii) Om f är kontinuerlig så gäller att

$$f(\bar{x}) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i)$$

↑
pga kontinuitet

Om f dessutom är Lipschitz-kontinuerlig så gäller att

$$|f(\bar{x})| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \right|$$

Antag att $f(a) < 0 \rightarrow$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} -f(x_i)$$

$$\leq \lim_{i \rightarrow \infty} -f(x_i) + f(X_i)$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} | -f(x_i) + f(X_i) |$$

$$\leq \lim_{i \rightarrow \infty} L_f \cdot |x_i - X_i|$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} Lf \cdot (b-a) \cdot 2^{-i} = 0.$$

$$\therefore f(\bar{x}) = 0. \quad \blacksquare$$

* Korollarium: Satsen om mellanliggande värden
 ↑
 "följsats"

Om funktionen f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[a, b]$, så antar den alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Beweis:

Notera först att om $f(a) = f(b)$ så är satsen självklar.

Vi skall visa att för alla $\bar{f}$ mellan $f(a)$ och $f(b)$ kan vi hitta $\bar{x} \in (a, b)$ så att $f(\bar{x}) = \bar{f}$.

Bilda nu funktionen

$$g(x) = f(x) - \bar{f} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(a) = f(a) - \bar{f} \\ g(b) = f(b) - \bar{f} \end{cases}$$

Notera att g också är (Lipschitz-) kontinuerlig!

$$\Rightarrow g(a) \cdot g(b) < 0, \text{ ty } \bar{f} \text{ ligger mellan } f(a) \text{ och } f(b)$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) : g(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\bar{x}) - \bar{f}}_{= g(\bar{x})} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) = \bar{f}.$$

