

* Idag: Fixpunktsiteration

(Ett av mina favoritsnitt!)

* Ekvationslösning

Vi har sett att vi kan lösa

$$f(x) = 0$$

med bisektion.

Vi kommer denna vecka att studera en alternativ metod, nämligen fixpunktsiteration.

Centrala begrepp för att studera fixpunktsiteration är:

- Lipschitz-kontinuitet
- Cauchy-följder

* Rötter och fixpunkter

Definition: Rot

En rot är en lösning $\bar{x}$ till ekvationen

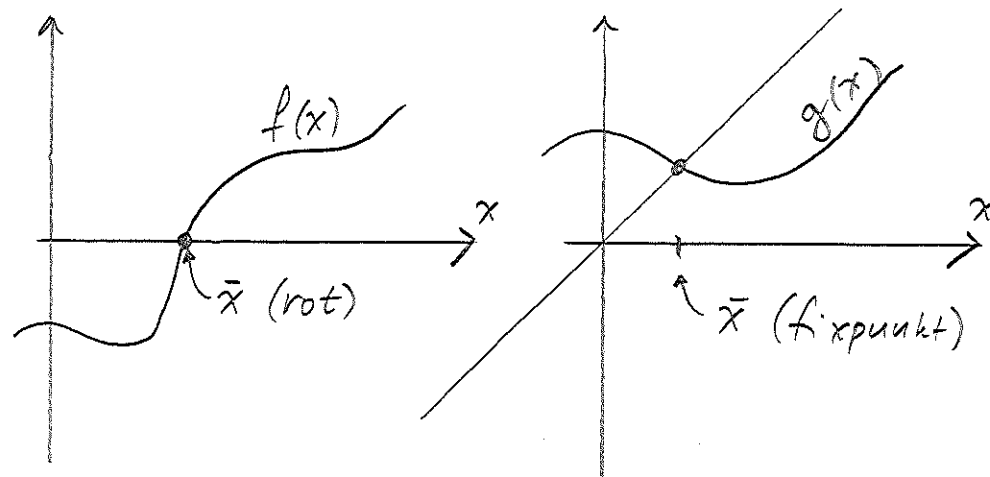
$$f(x) = 0.$$

Definition: Fixpunkt

En fixpunkt är en lösning $\bar{x}$ till ekvationen

$$x = g(x).$$

← ändrar sig inte när man stoppar in i g



* Omskrivning

En ekvation kan skrivas om på fixpunktsform på oändligt många sätt (och omvänt). Exempel:

$$(i) \quad f(x) = 0$$

$$\alpha f(x) = 0 \quad (\alpha \neq 0)$$

$$x + \alpha f(x) = x$$

$$\boxed{x = \underbrace{x + \alpha f(x)}_{g(x)}}$$

(ii)

$$x = g(x)$$

$$\boxed{x - g(x) = 0}$$

* Definition: Fixpunktsiteration

En iteration på formen

$$\boxed{x_i = g(x_{i-1})}$$

kallas fixpunktsiteration.

* Ekvationslösning med fixpunktsiteration

- Ekvation $f(x) = 0$
- Skriv om på fixpunktsform $x = g(x)$
- Välj startgissning x_0
- Iterera

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$\vdots$

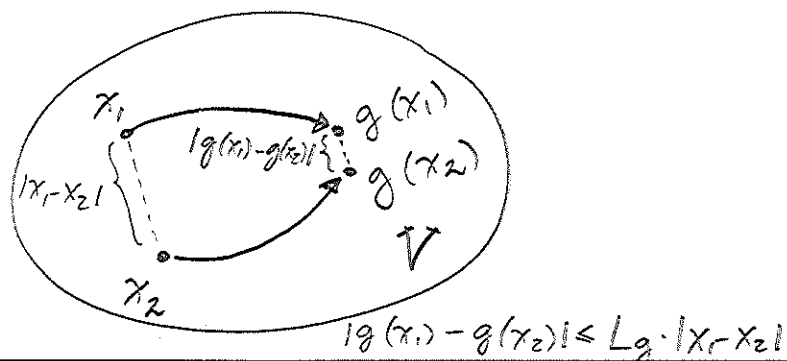
Förhoppningen är att iterationen konvergerar mot en lösning av $x = g(x)$ och därmed $f(x) = 0$.

Central fråga: När konvergerar iterationen?

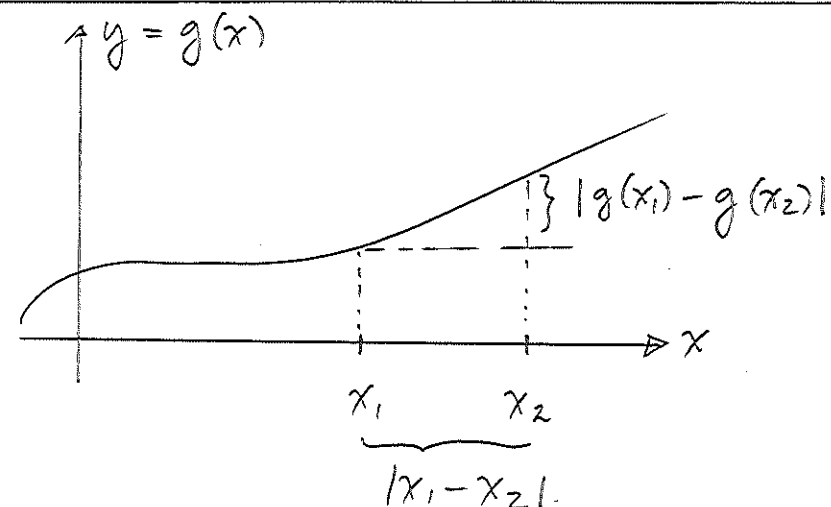
Svar: När g är en kontraktion, dvs när g har en Lipschitz-konstant $L_g < 1$.

* Definition: Kontraktionsavbildning

En kontraktionsavbildning är en funktion $g: V \rightarrow V$ med Lipschitz-konstant $L_g < 1$.



$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_g \cdot |x_1 - x_2|$$



* Sats: Banachs fixpunktsats

Om g är en kontraktionsavbildning på ett slutet intervall I så har g en entydig fixpunkt på I ,
dvs

$$\exists ! \bar{x} \in I : \bar{x} = g(\bar{x}).$$

Fixpunkten är gränsvärdet av fixpunktsiterationen $x_i = g(x_{i-1})$ för godtyckligt startvärde $x_0 \in I$.

Bevis: På nästa föreläsning

* Exempel 1

$$g(x) = 2/x \quad (x \neq 0)$$

Bestäm fixpunkter ($x = g(x)$)

$$x = 2/x$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ Två fixpunkter $\bar{x} = \pm \sqrt{2}$

Fixpunktiteration:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = g(x_0) = 2/1 = 2$$

$$x_2 = g(x_1) = 2/2 = 1$$

$$x_3 = g(x_2) = 2/1 = 2$$

$\vdots$

Ger 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

Konvergerar inte!

Vad är Lipschitz-konstanten?

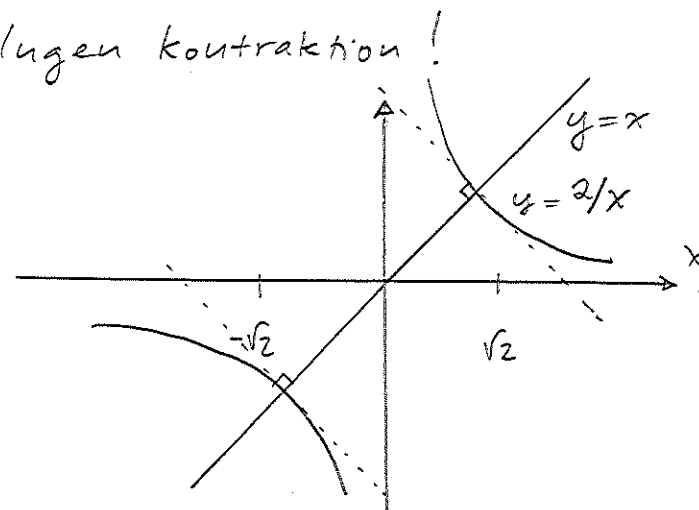
$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} \right|$$

$$= \left| \frac{2x_2 - 2x_1}{x_1 x_2} \right| = \underbrace{\left(\frac{2}{|x_1 x_2|} \right)}_{L_g} \cdot |x_1 - x_2|$$

Är L_g begränsad i närheten av fixpunkten?

$$\frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1 \nless 1$$

$\therefore$ Ingen kontraktion!



* Exempel 2:

$$g(x) = \frac{x + 2/x}{2} \quad (x \neq 0)$$

Bestäm fixpunkter ($x = g(x)$)

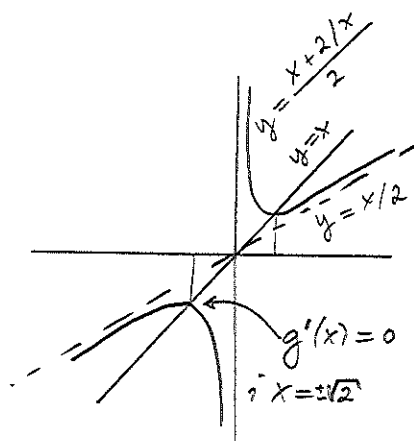
$$x = \frac{x + 2/x}{2}$$

$$2x = x + 2/x$$

$$x = 2/x$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$



∴ Två fixpunkter $\bar{x} = \pm \sqrt{2}$

Fixpunktsiteration:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1 + 2/1}{2} = 3/2 = 1.5$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1.5 + 2/1.5}{2} = 1.4166...$$

$$x_3 = g(x_2) \approx 1.4142...$$

Konvergerar mot fixpunkten $\sqrt{2}$!

Vad är Lipschitz-konstanten?

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &= \left| \frac{x_1 + 2/x_1}{2} - \frac{x_2 + 2/x_2}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 + \frac{2}{x_1} - x_2 - \frac{2}{x_2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 - x_2 - \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left| 1 - \frac{2}{x_1 x_2} \right|}_{L_g} \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

I närheten av fixpunkten:

$$L_g = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - \frac{2}{2} \right| = 0 < 1$$

∴ Definitivt en kontraktion!
(Bästa möjliga)

På vilket intervall är det en
kontraktion?

$$\text{Tag } x_1 = x_2 = x$$

$$\Rightarrow L_g = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - \frac{2}{x \cdot x} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - 2/x^2 \right| < 1$$

$$-1 < \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) < 1$$

$$-2 < 1 - \frac{2}{x^2} < 2$$

$$-2x^2 < x^2 - 2 < 2x^2$$

$$-3x^2 < -2 < x^2$$

$$\underbrace{-3x^2 < -2 < x^2}_{\text{alltid uppfyllt}}$$

$$-3x^2 < -2$$

$$2 < 3x^2$$

$$x^2 > 2/3$$

$$|x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81$$

$\therefore$ Kontraktion på $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} - \varepsilon] = I_1$

Kontraktion på $[\sqrt{\frac{2}{3}} + \varepsilon, \infty) = I_2$

Från Banachs fixpunktsats följer att
fixpunktsiterationen konvergerar mot

unik fixpunkt på I_1 ($\bar{x} = -\sqrt{2}$)

unik fixpunkt på I_2 ($\bar{x} = \sqrt{2}$)

Övning: Bestäm α för omskrivningen
 $x = x + \alpha f(x)$ då $f(x) = x^2 - 2$
och $g(x) = 2/x$.

Övning: Bestäm α för omskrivningen
 $x = x + \alpha f(x)$ då $f(x) = x^2 - 2$
och $g(x) = (x + 2/x) / 2$.