

* Idag: Banachs fixpunktssats

BM.5

(En av kursens höjdpunkter!)
(Kanske den mest episka föreläsningen!)

Först en liten hjälpsats:

* Lemma: Geometrisk summa
(hjälpssats)

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} \quad (a \neq 1)$$

Beris:

$$VL = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

$$HL = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a-1) \cdot VL &= (a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ &= (a-1) \cdot (a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1}) = \end{aligned}$$

$$= (a^1 + a^2 + \dots + a^n) - (a^0 + a^1 + \dots + a^{n-1})$$

$$= a^n - a^0 = a^n - 1 = HL \cdot (a-1)$$

$$\therefore (a-1) \cdot VL = (a-1) \cdot HL$$

$$\Rightarrow VL = HL$$



* Notera att om $|a| < 1$ gäller

att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

Vi skriver

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}$$

Exempel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/3} = 3/2$$

* Sats: Banachs fixpunktsats

Om g är en kontraktionsavbildning på ett slutet intervall I så har g en entydig fixpunkt på I , dvs

$$\exists ! \bar{x} \in I : \bar{x} = g(\bar{x}).$$

Fixpunkten är gränsvärdet av fixpunktsiterationen $x_i = g(x_{i-1})$ för godtyckligt startvärde $x_0 \in I$.

Beris:

Berisidé:

(i) Konstruera en talföljd $\{x_i\}$

(ii) Visa att $\{x_i\}$ är en Cauchy-följd
så att $\exists \bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$

(iii) Visa att $\bar{x} = g(\bar{x})$

(iv) Visa att $\bar{x}$ är unik

(i) Låt talföljden $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ genereras av

$$\begin{cases} x_0 = \text{godtyckligt tal} \in I \\ x_i = g(x_{i-1}), i=1,2,3,\dots \end{cases}$$

Detta ger

$$x_0 = x_0$$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1) = g(g(x_0))$$

$$x_3 = g(x_2) = g(g(g(x_0)))$$

osv

(ii) Betrakta först skillnaden $|x_{k+1} - x_k|$:

↑
två intilliggande iterationer

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &\leq L_g \cdot |x_k - x_{k-1}| \\ &= L_g \cdot |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})| \\ &\leq L_g \cdot L_g \cdot |x_{k-1} - x_{k-2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_g^2 \cdot |x_{k-1} - x_{k-2}| \\
&\leq L_g^3 \cdot |x_{k-2} - x_{k-3}| \\
&\leq \dots \leq L_g^k \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

$$\therefore |x_{k+1} - x_k| \leq L_g^k \cdot |x_1 - x_0| \quad (*)$$

Betrakta nu skillnaden $|x_i - x_j|$
för (säg) $i < j$:

$$\begin{aligned}
|x_i - x_j| &= \{ \text{lägg till och dra ifrån} \} = \\
&= | \underbrace{(x_i - x_{i+1})}_{=0} + \underbrace{(x_{i+1} - x_{i+2})}_{=0} + \dots + \underbrace{(-x_{j-2})}_{=0} + \underbrace{(x_{j-2} - x_{j-1})}_{=0} + (x_{j-1} - x_j) | \\
&\leq \{ \text{triangelolikheten} \} \\
&\leq |x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - x_{i+2}| + \dots + |x_{j-2} - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_j| \\
&\leq \{ \text{använd } (*) \} \\
&\leq L_g^i \cdot |x_1 - x_0| + L_g^{i+1} \cdot |x_1 - x_0| + \dots + L_g^{j-1} \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (L_g^i + L_g^{i+1} + \dots + L_g^{j-1}) \cdot |x_i - x_0| \\
&= L_g^i \cdot (1 + L_g + L_g^2 + \dots + L_g^{j-i-1}) |x_i - x_0| \\
&= L_g^i \cdot \sum_{k=0}^{j-i-1} L_g^k \cdot |x_i - x_0|
\end{aligned}$$

$$= \{ \text{Lemma om geometrisk summa} \}$$

$$= L_g^i \cdot \frac{1 - \underbrace{L_g^{j-i}}_{\in [0,1]}}{1 - L_g} \cdot |x_i - x_0|$$

$$\leq \frac{L_g^i}{1 - L_g} |x_i - x_0|$$

$$\therefore |x_i - x_j| \leq \frac{L_g^i}{1 - L_g} |x_i - x_0|, \quad i < j$$

← Blir hur liten som helst om i (och j) är stora!

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon$$

$\therefore \{x_i\}$ är en Cauchy-följd på ett slutet begränsat intervall

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in I : \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}.$$

(iii) Är $\bar{x}$ en fixpunkt?

$$g(\bar{x}) = g\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i\right) = \{g \text{ kontinuerlig}\}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i)$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \bar{x}.$$

$$\therefore \bar{x} = g(\bar{x})$$

(iv) Är fixpunkten unik?

Antag att vi har två fixpunkter $\bar{x} \neq \tilde{x}$:

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

$$\tilde{x} = g(\tilde{x})$$

$$\Rightarrow |\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})|$$

$$\leq L_g \cdot |\bar{x} - \tilde{x}|$$

$$\Rightarrow 1 \leq L_g \text{ men } L_g < 1 \quad \text{!}$$

$$\therefore \bar{x} = \tilde{x}.$$

* Kommentarer

- Fixpunktsiteration fungerar till skillnad från bisektion i flera dimensioner (system av ekvationer); dvs

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

↑ vektorer av längd n

Exempel:

$$\begin{cases} 3x + 2y^2 = 5 \\ \sin(\pi x/2) \cdot (1 + y^3) = 2 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y^2 - 5 \\ \sin(\pi x/2) \cdot (1 + y^3) - 2 \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3x + 2y^2 - 5 \\ \sin(\pi x/2) \cdot (1 + y^3) - 2 \end{pmatrix}$$

Konvergerar mot $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\alpha = -1$.

- Vi har bevisat fixpunktsatsen för $I \subset \mathbb{R}$ men samma bevis gäller faktiskt för alla "fullständiga metriska rum", t.ex.

$$V = \mathbb{R}^2 \quad (\text{vektorer av längd 2})$$

$$V = \mathbb{R}^3 \quad (\text{--- " --- 3})$$

$$V = \mathbb{R}^n \quad (\text{--- " --- n})$$

$$V = \mathbb{C}$$

$$V = C[a, b] \quad \text{kontinuerliga funktioner på slutet intervall}$$

...

* Konvergenzhastighet

Hur snabbt minskar felet?

$$\begin{aligned} |e_i| &= |\bar{x} - x_i| = |g(\bar{x}) - g(x_{i-1})| \\ &\leq L_g \cdot |\bar{x} - x_{i-1}| = L_g \cdot |e_{i-1}| \end{aligned}$$

$$\therefore |e_i| \leq L_g \cdot |e_{i-1}|$$

Felet minskar med (åtminstone) med en faktor L_g i varje iteration.

Kallas linjär konvergens.

Senare skall vi lära oss att konstruera fixpunktsiterationer med kvadratisk konvergens (Newtons metod).

Övning: Skriv om ekvationen $x - \cos x = 0$ på fixpunktsform på tre olika sätt.

Övning: Bestäm alla fixpunkter till $g(x) = 2(\sin x - \cos x) + x$.

Övning: Bestäm en explicit formel för x_i då $x_0 = 1$ och $g(x) = 2x + 1$.

Övning: Hitta en kontraktionsavbildning för lösning av ekvationen $x^4 = 16$.

Ledning: Skriv på formen $g(x) = x + \alpha f(x)$ och bestäm α .

Övning: Hitta en kontraktionsavbildning för lösning av ekvationen $x \cdot \sin x = 1$.

Ledning: Utvisha att $L_g \geq \max |g'|$.

Plotta funktionen för att hitta ett lämpligt intervall.

Övning:^() Studera fixpunktsiterationen

$$z_i = g(z_{i-1})$$

för $g(z) = z^2 + c$ för olika värden på parametern $c \in \mathbb{C}$.

Färglägg de punkter c för vilka $\{z_i\}$ är begränsad. Känner du igen figuren?

AL 2013-09-16