* Idag: Flyttal,
avrundningsfel,
(feluppskattningar)
(orientering)
BM.1

---

* Datorrepresentation av reella tal:
"Flyttal"

- Reella tal: oändligt många decimaler
- Flyttal: ändligt många decimaler

=> Flyttal är alltid rationella tal!

=> Avrundningsfel

Viktigt att känna till vid numeriska beräkningar!

* Representation av flyttal

Skrivs på exponentform:

$$x = m \cdot b^{e}$$

e ← exponent

b: bas

m: mantissa

Normaliserad mantissa:

$$1 \leq |m| < b$$

Bas: $b \in \mathbb{Q}$

$b = 10$ (decimalt talsystem)

$b = 2$ (binärt talsystem)

$b = 16$ (hexadecimalt talsystem)

Exponent:

$$e_{min} \leq e \leq e_{max}$$

$e \in \mathbb{Z}$

Exempel: $(b=10)$

$$x = 3.1415$$

$$= \underbrace{3.1415}_{1 \le |m| < 10} \cdot \underbrace{10}_{b}^{0 \leftarrow e}$$

$$x = 3141.59265$$

$$= \underbrace{3.14159265}_{1 \le |m| < 10} \cdot \underbrace{10}_{b}^{4 \leftarrow e}$$

Exempel: $(b=2)$

$$x = 1.011001$$

$$= \underbrace{1.011001}_{1 \le |m| < 2} \cdot \underbrace{2}_{b}^{0 \leftarrow e}$$

$$x = 1011001.11011$$

$$= \underbrace{1.01100111011}_{1 \le |m| < 2} \cdot \underbrace{2}_{b}^{6 \leftarrow e}$$

Notera: De enda siffror som finns är $0, \ldots, b-1$, dvs

0 och 1

* Något om talsystem

På samma sätt som

$$255_{10} = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$
$$= 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

har vi

$$11111111_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$
$$= 255$$

$$\therefore \quad 255_{10} = 11111111_2$$

Allmänt:

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0)_b = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b^k .$$

Notera att speciellt gäller

$$\underbrace{((b-1)(b-1)(b-1)\cdots(b-1))}_{n \text{ siffror}}{}_b = b^n - 1$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

Övning: Visa detta!

Ledning: Använd välbekant lemma från F14...

Exempel:

$$1111111_2 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

$$999_{10} = 10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999$$

* Andra talsystem:

trinära ($b = 3$)

kvartenära ($b = 4$)

⋮

hexadecimala ($b = 16$)

$\updownarrow$ 0, 1, 2, 3, ..., 9, A, B, C, D, E, F

* Exempel: RGB (röd-grön-blå)

(Färgpalett för HTML och grafikprogram)

"FFFFFF" = (R G B)

Röd $FF_{16} = 15 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 255$

Grön $FF_{16} = 255$

Blå $FF_{16} = 255$

= "vit"

Varje färg får variera mellan 0 och $FF_{16} = 255$. Ger

$256 \cdot 256 \cdot 256 = (2^8)^3 = 2^{24}$

$= 2^{10+10+4} = \underbrace{2^{10}}_{=1024} \cdot 2^{10} \cdot 2^4$

$\approx 1000 \cdot 1000 \cdot 16 = 16$ miljoner olika färger.

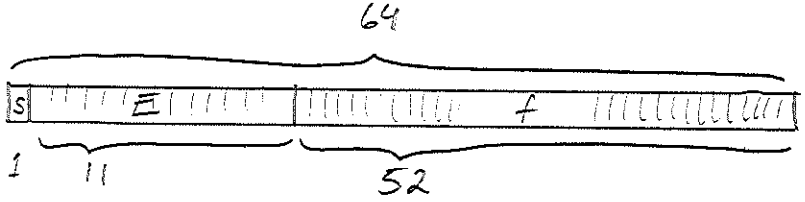
* Flyttalsstandarden IEEE 754

Två versioner:

Binary32 ← "float" i C/C++

Binary64 ← "double" i C/C++
MATLAB

- Bas 2
- 64 bitar / tal (Binary64), dvs 8 bytes (1 byte = 8 bitar)
- $m = 1.f$, 1 lagras ej
- I stället för e lagras $E = e + 1027$
- En bit används för att lagra tecknet
- 11 bitar används för att lagra E
- 52 bitar används för att lagra f



Största tal: $\approx \pm 2 \cdot 10^{308}$

Minsta tal: $\approx \pm 2 \cdot 10^{-308}$

ε_{mach} $\approx 2 \cdot 10^{-16}$

("maskinprecision")

* Maskinprecision, avrundningsfel

- Alla tal representeras med ett relativt fel som är som störst ε_{mach}:

$$fl(x) = x \cdot (1 + \Delta)$$

$$|\Delta| \leq \varepsilon_{mach}$$

- Alla operationer har ett relativt fel som är som störst ε_{mach}:

$$fl(fl(x) \cdot fl(y)) = fl(x) \cdot fl(y) \cdot (1 + \Delta)$$

$$|\Delta| \leq \varepsilon_{mach}$$

* Exempel:

Beräkna $f(x) = \dfrac{4x}{(1+x)^2 - (1-x)^2}$

Notera först att

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2+2x-(1+x^2-2x)} = \frac{4x}{4x} = 1$$

MATLAB ger

$f(1) = 1$

$f(0.001) = 1.00\ldots 08 \neq 1$

$f(10^{-10}) = 0.99\cdots 172$

$f(10^{-16}) = 1.8014\ldots$

$f(10^{-17}) = \ln f$

Om $|x|$ är litet gäller att

$$\frac{4x}{(1+x)^2-(1-x)^2} \approx \frac{4x}{1+2x-(1-2x)}$$

MATLAB (IEEE 754) räknar

$$\frac{4x}{(1+2x)\cdot(1+\Delta_1)-(1-2x)\cdot(1+\Delta_2)}$$

$$= \frac{4x}{1+\Delta_1+2x+\underbrace{2x\Delta_1}_{\approx 0}-(1+\Delta_2-2x-\underbrace{2x\Delta_2}_{\approx 0})}$$

$$\approx \frac{4x}{4x+\Delta_1+\Delta_2}$$

Om $x \sim \Delta_1 \sim \Delta_2$ så kan resultatet bli nästan vad som helst...

Demo: (MATLAB)

- Beräkning av $f(x) = \dfrac{4x}{(1+x)^2 - (1-x)^2}$
- Beräkning av största/minsta tal (notera "subnormala" tal)
- Beräkning av ε_{mach}
- Mandelbrot / fixpunktsiteration