

* Idag: Derivatan,
deriveringsregler

F16

Adams/Essex (2.1)
2.2-2.4

* Definition: Derivata

Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Om gränsvärdet

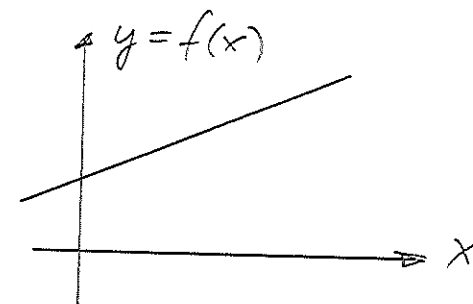
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, så kallas $f'(x)$ derivatan av f i punkten x ,
och vi säger att f är deriverbar i punkten x .

Notera: Detta definierar en ny funktion $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i alla de punkter där f är deriverbar.

* Exempel:

$$f(x) = kx + m$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

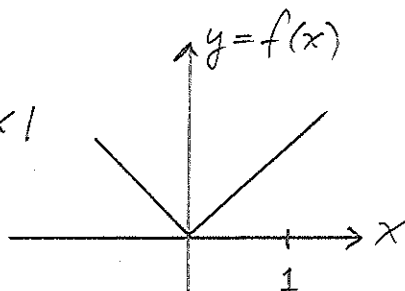
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot (x+h) + m - (kx + m)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{kx} + kh - \cancel{kx}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} k = \underline{\underline{k}} \quad \text{ok!}$$

Exempel:

$$f(x) = |x|$$



$$(i) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1+h| - 1}{h}$$

h litet

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$\therefore f$ deriverbar i $x=1$ och $f'(1)=1$

(ii) Är f deriverbar i $x=0$?

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

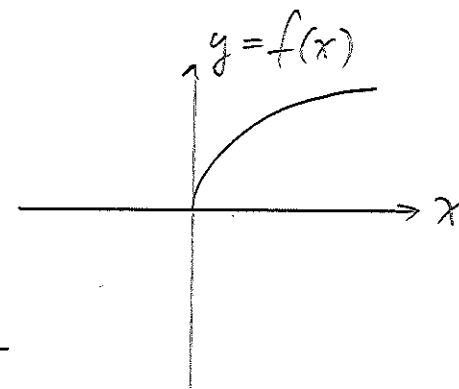
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

$\therefore$ Gränsvärdet existerar inte (olika om $h \rightarrow 0+$ eller $h \rightarrow 0-$)

$\therefore f$ ej deriverbar i $x=0$.

Exempel:

$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* Några välbekända derivator

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^2	$2x$
$1/x$	$-1/x^2 \quad (x \neq 0)$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x}) \quad (x > 0)$
x^r	$r \cdot x^{r-1} \quad (x^{r-1} \in \mathbb{R})$
$ x $	$\operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$

* Notation

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = D_x f = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tidsderivata}}}{f}_x = f'$$

* Sats: Deriverbarhet $\Rightarrow$ KontinuitetBeris:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h + f(x) \right)$$



$$= f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

* Deriveringsregler

Derivata av

(i) $\begin{cases} \text{summa} & f+g \\ \text{differens} & f-g \\ \text{produkt} & \alpha f \end{cases}$

(ii) produkt fg

(iii) kvot f/g

(iv) sammansättning $f \circ g$

* Sats: Derivatans "linearitet" (i)

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara)

Beris:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - (\alpha f + \beta g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - (\alpha f(x) + \beta g(x))}{h} \end{aligned}$$

$$= \{ \text{utnyttja linearitet för gränsvärden (F7)} \} =$$

$$= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\therefore (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \blacksquare$$

Notera: Innehåller alla 3 reglerna (i)!

* Sats: Produktregeln (ii)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara)

Beris:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= \{ \text{lägg till och dra ifrån!} \} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Utnyttjar att f, g deriverbara $\Rightarrow$ kontinuerliga

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\therefore (fg)' = f'g + fg' \quad \blacksquare$$

* Sats: Kvotregeln (iii)

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara och $g(x) \neq 0$)

Beris:

$$(f/g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f/g)(x+h) - (f/g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h}$$

= {lägg till och dra ifrån!}

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x+h) + f(x)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)} + f(x) \cdot \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\therefore (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



* Sats: Kedjeregeln

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

(i alla punkter x där g är deriverbar
och f deriverbar i $g(x)$)

Beris:

Definiera

Ge exempel
 $f(x) = \sin x$
 $g(x) = x^2$

$$E(0) = 0$$

$$E(k) = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u)$$

Notera :

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(k) = 0$$

Notera också att

$$f(u+k) - f(u) = k \cdot (f'(u) + E(k))$$

$$\text{Tag nu } \begin{cases} k = g(x+h) - g(x) \\ u = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \underbrace{f(g(x))}_u + \underbrace{g(x+h) - g(x)}_k - f(g(x)) \\ &= k \cdot (f'(g(x)) + E(k)) \end{aligned}$$

$$\therefore f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k)) \cdot (g(x+h) - g(x))$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (f'(g(x)) + E(k)) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

$$\text{ty } E(k) \rightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0.$$



* Varför måste beviset vara så krångligt?

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\rightarrow f'(g(x)) ?} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)}
 \end{aligned}$$

Vad händer om $g(x+h) = g(x)$?

(Jmf. uppg. 2.4.46 i Adams/Essex.)