

* Idag: Medelvärdessatsen,
linearisering

F18

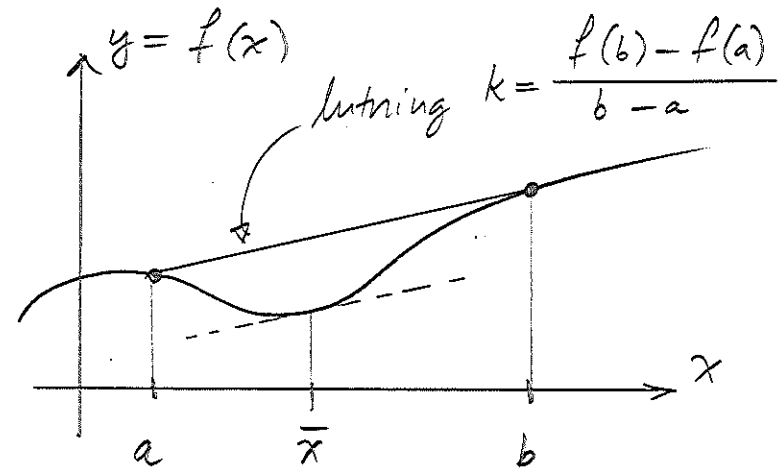
Adams / Essex 2.8

* Sats: Medelvärdessatsen

Om funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a, b) så finns ett $\bar{x} \in (a, b)$ s.a.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\bar{x}).$$

(Vi skall bevisa detta strax!)



måste finnas (minst) en punkt $\bar{x} \in (a, b)$ med exakt samma lutning som mellan $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.

Exempel: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{Ab^2 + Bb + C - (Aa^2 + Ba + C)}{b - a} \\ &= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a} = A(b + a) + B \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

Finns $\bar{x} \in (a, b)$ så att

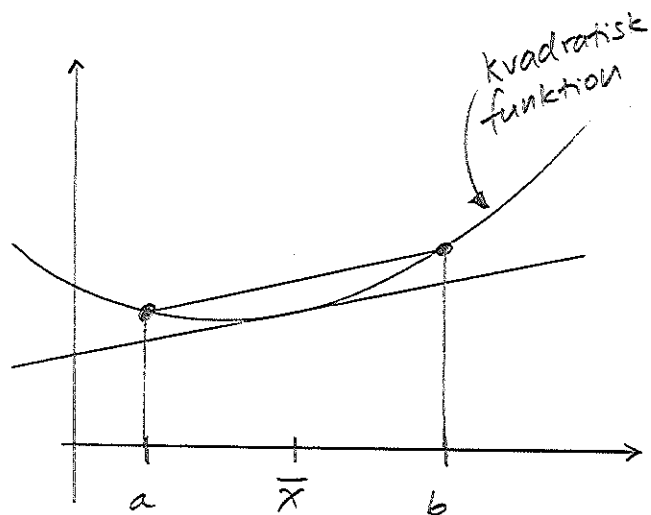
$$A \cdot (b+a) + B = 2A\bar{x} + B$$

(medelvärdessatsen säger att det finns)

$$A(b+a) = 2A\bar{x}$$

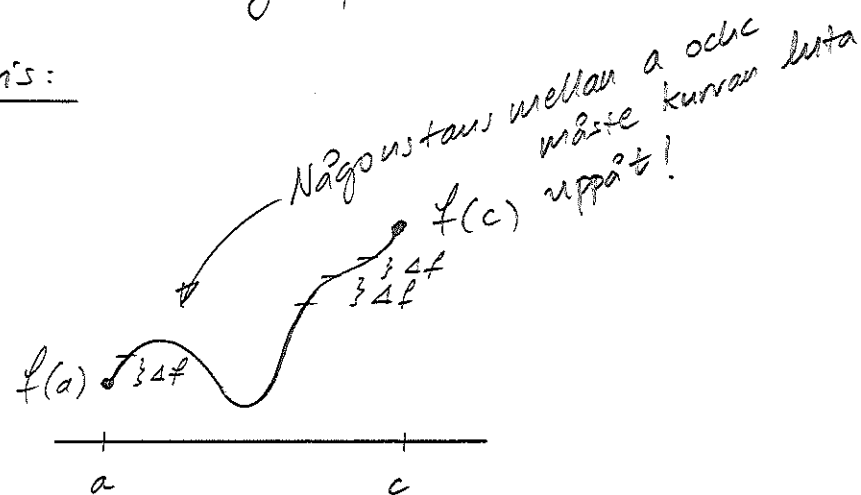
$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

$\therefore$ Värdet antas i mittpunkten!



* Lemma: Om $f(a) < f(c)$ och f' är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, c]$ så måste $f'(\bar{a}) > 0$ i någon punkt $\bar{a} \in (a, c)$.

Beris:



Alt 1: "Följer från figuren" (ingen tillfredsställande bevis)

Alt 2: I läsperiod II skall vi visa att

$$f(c) = f(a) + \int_a^c f'(x) dx$$

vilket följer av att

$$f(c) = f(a) + \Delta f + \Delta f + \dots$$

$$= f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \dots$$

$$\approx f(a) + f' \cdot \Delta x + f' \cdot \Delta x + f' \cdot \Delta x + \dots$$

$$\approx f(a) + \int_a^x f'(x) dx$$

Antag nu att $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

$$\Rightarrow f(c) = f(a) + \int_a^c \underbrace{f'(x)}_{\leq 0} dx$$

$$\leq f(a) + \int_a^c 0 dx =$$

$$= f(a) + 0 = f(a)$$

$$\therefore f(c) \leq f(a)$$

Men: $f(c) > f(a)$

$$\Rightarrow \text{Inte sant att } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, c)$$

$$\Rightarrow \exists \bar{a} \in (a, c) : f'(\bar{a}) > 0.$$



Beris: (av medelvärdessatsen)

Vi kommer (i tillägg) att anta att f' är Lipschitz-kontinuerlig.

Berisidé:

(i) Betrakta fallet $f(a) = f(b)$

(Rolles sats) och använd Bolzano

(ii) Utvidga till fallet $f(a) \neq f(b)$

(i) Antag $f(a) = f(b)$

Skall visa att $\exists \bar{x} \in (a, b) :$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad (*)$$

Two fall:

1) $f(x) = f(a) = f(b) = \text{konstant}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow (*) \text{ uppfyllt}$$

(ii) $\exists c \in (a, b) : f(c) \neq f(a) = f(b)$

Lemma $\Rightarrow \exists \bar{a} \in (a, c) : f'(\bar{a}) > 0$

(eller $f'(\bar{a}) < 0$)

På samma sätt:

$$\exists \bar{b} \in (c, b) : f'(\bar{b}) < 0$$

(eller $f'(\bar{b}) > 0$).

$$\Rightarrow f'(\bar{a}) \cdot f'(\bar{b}) < 0$$

Bolzaus sats ger då att
(ty f' är Lipschitz-kontinuerlig)

$$\exists \bar{x} \in (\bar{a}, \bar{b}) \subset (a, b) : f'(\bar{x}) = 0.$$

$\therefore$ Medelvärdessatsen uppfylls då

$$f(a) = f(b). \text{ Detta kallas } \underline{\text{Rolles sats}}.$$

(ii) Om $f(a) \neq f(b)$ bildar vi funktionen

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Notera:

$$g(a) = f(a) - 0 = f(a) \quad \leftarrow \text{Samma!}$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Rolles sats ger

$$\exists \bar{x} \in (a, b) : g'(\bar{x}) = 0$$

Men:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\therefore f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(\bar{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



* Linearisering

Medelvärdessatsen säger

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tillämpa på nya variabler

$$a = \bar{x} \text{ (fix punkt)}$$

$$b = x \text{ (variabel)}$$

$$\bar{x} = \xi(x) \text{ (punkt mellan } x \text{ och } \bar{x})$$

↑
xi

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

$$f'(\xi)(x - \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x})$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Alternativ och minst
lika viktig formulering
av medelvärdessatsen

Om $|x - \bar{x}|$ är liten kan vi anta att

$$f'(\xi) \approx f'(\bar{x})$$

ekvation för en
rät linje!

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}$$

Denna approximation kallas linearisering.

f approximeras med en linjär (egentligen
"affin") funktion. Vi återvänder till
detta senare i kursen!