

* Idag: Översikt
 Linearsering (forts)
 F19
 Newtons metod

BM.6

(Adams / Essex 4.2, 4.9)

* Översikt

Vårt mål: Att lösa ekvationer!

Leder naturligt till studiet av
 viktiga matematiska begrepp!

lp I: Algebraiska ekvationer på $\mathbb{R}$

$$f(x) = 0$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

lv1 + lv2: gränsvärden

↓
 kontinuitet

↓
 Lipschitz-kontinuitet

↓
 Cauchy-följder, def av reella tal

↓
 bisektion → lös $f(x) = 0$!

↓
 Bolzaus sats

lv3: fixpunktsiteration → lös $f(x) = 0$!
 $(x = g(x))$

↓
 Banachs fixpunktsats
 flyttal

lv4: derivator

↓
 medelvärdessatsen

↓
 linearisering → (?)

← Trust me!
 I have a plan!

lv5: lineariseringNewton's metod $\rightarrow$ lös $f(x)=0$!lv5-7: mer om derivator
repetitionlp II: Differentialekvationer (ordinära)

$$u'(x) = f(u(x), x)$$

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Lösningen till ekvationen är en funktion!

Leder till definition av integralen:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x f(y) dy.$$

lp III: Algebraiska ekvationer på $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Leder till studie av linjär algebra
(matriser, vektorer, linjära rum)lp IV: Differentialekvationer (partiella)

$$A(u) = f$$

↑ differentialoperator

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Exempel:

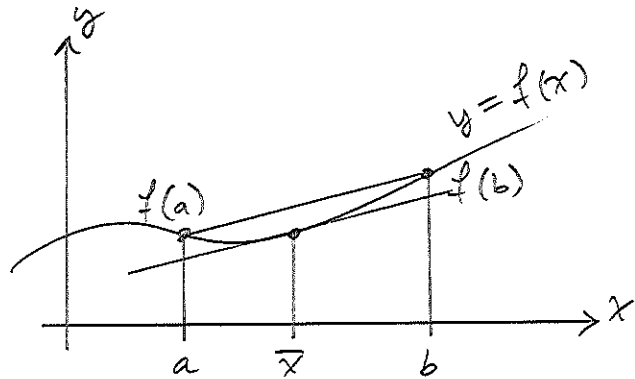
$$-\Delta u = f \quad (\text{Poissons ekvation})$$

$$\begin{cases} \eta + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (\text{Navier-Stokes ekvationer})$$

Ok, då vet vi vart vi är på väg - nu fortsätter vi med dagens ämne...

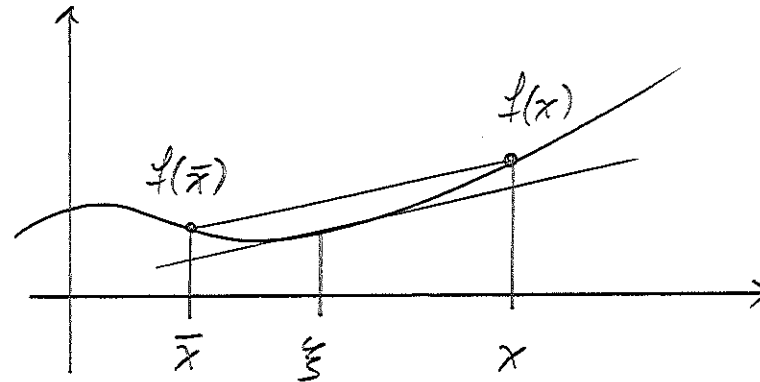
* Linearisering

Medelvärdessatsen ger

Det finns (minst) ett $\bar{x} \in (a, b)$:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Låt oss rita samma figur, men med andra variabler:

Det finns (minst) ett $\xi = \xi(x) \in (\bar{x}, x)$ s.a.

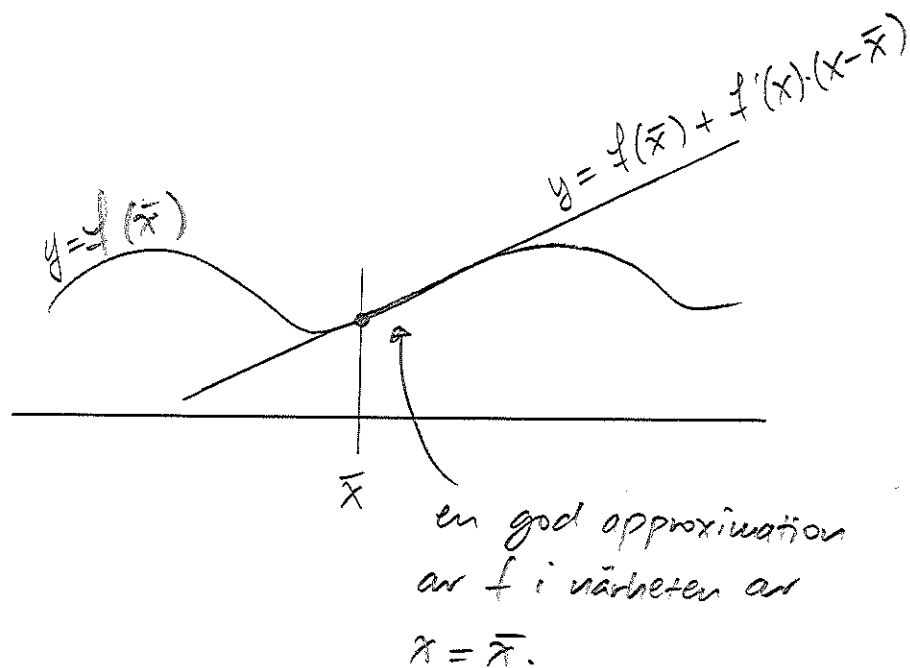
$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Om $|x - \bar{x}|$ är litet kan vi göra approximationen

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

Detta kallas lineariseringen av f runt $x = \bar{x}$.



Ätt mycket användbart verktyg!

* Newtons metod

Vill lösa ekvationen $f(x) = 0$ med fixpunktsiteration $x_n = g(x_{i-1})$ för

$$g(x) = x + \alpha f(x).$$

Hur väljer vi α ?

Antag att vi har iterationsvärdet x_{i-1} .
Approximera $f(x)$ med lineariseringen av f runt $x = x_{i-1}$:

$$f(x) \approx f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1})$$

Vi vill välja x_i (nästa iteration) så att

$$f(x_i) = 0$$

(men det kan vi inte). Approximera genom att använda lineariseringen:

$$f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Denna fixpunktsiteration kallas
Newtons metod.

Notera: Motsvarar $g(x) = x + \alpha f(x)$
med $\alpha = -1/f'(x)$

Exempel: $f(x) = x^2 - 2$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} \\ &= \frac{x \cdot 2x - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} \\ &= \frac{x + 2/x}{2} \end{aligned}$$

Käns det bekant?

* Lipschitz-konstant och derivata

Med hjälp av medelvärdesatsen kan vi nu
göra följande enkla kalkyl:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |g'(\xi) \cdot (x_1 - x_2)|$$

$$= |g'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq L_g \cdot |x_1 - x_2|$$

där $\boxed{L_g = \max_I |g'|}$

(kräver att g är kont. på slutet intervall $[a, b]$
och deriverbar på (a, b))

* När konvergerar Newton?

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= 1 - \frac{f' \cdot f' - f f''}{(f')^2} \\ &= \frac{\cancel{(f')^2} - \cancel{(f')^2} + f f''}{(f')^2} \\ &= f f'' / (f')^2 \end{aligned}$$

$$\therefore L_g \approx 0 \text{ om } f \approx 0$$

$\Rightarrow$ Konvergerar mycket snabbt i närheten av en rot.

Vi vet att (BM.5):

$$|x_i - \bar{x}| \leq L_g \cdot |x_{i-1} - \bar{x}|$$

(linjär konvergens)

För Newtons metod kan man visa (BM.6):

$$|x_i - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} MK \cdot |x_{i-1} - \bar{x}|^2$$

(kvadratisk konvergens)

$$\begin{cases} M = \max \frac{1}{|f'|} \\ K = \max |f''| \end{cases}$$