

* Idag: Extremvärdesproblem

F22

Taylor's formel

(Svårt bevis!)

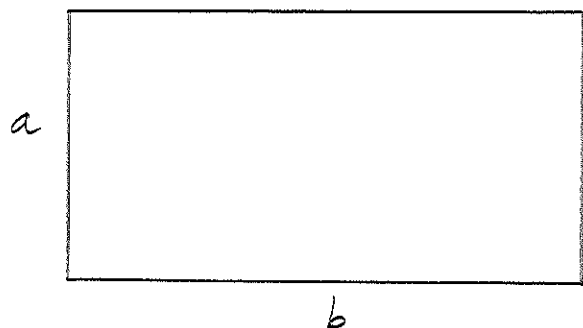
Adams/Essex 4.8, 4.10

* Extremvärdesproblem

- Direkt tillämpning av extremvärden (förra föreläsningen)
- Textbaserade problem

Exempel:

Maximera arean av en rektangel med given omkrets!



Samband: $L = 2a + 2b$

$$A = a \cdot b$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

Lös ut b :

$$b = \frac{L - 2a}{2} = \frac{L}{2} - a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(a) &= a \cdot b = a \cdot \left(\frac{L}{2} - a\right) \\ &= \frac{L}{2} \cdot a - a^2 \end{aligned}$$

Undersök:

- Ändpunkter: $a = 0$, $a = L/2$
- Kritiska punkter: $A'(a) = 0$
- Singulära punkter: saknas

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(L/2) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(L/2) &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ej maximum i ändpunkterna}$$

$$0 = A'(a) = \frac{L}{2} - 2a \Leftrightarrow a = L/4 \quad (\text{kvadrat!})$$

$$A''(a) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum för kvadrat}$$

* Taylors formel

- Linjär approximation (linearisering):

$$f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}_{\text{Första ordningens Taylor-utveckling}}$$

- Kvadratisk approximation

$$f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^2}_{\text{Andra ordningens Taylor-utveckling}}$$

Andra ordningens
Taylor-utveckling

- n:e ordningens approximation:

$$\begin{aligned} f(x) \approx & f(\bar{x}) \\ & + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \\ & + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^2 \\ & + \frac{1}{6} f'''(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^3 + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^n \end{aligned}$$

Exempel: $f(x) = e^x$, $\bar{x} = 0$, $n = 2$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \dots$$

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^x &\approx 1 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} (x - 0)^2 \\ &= 1 + x + x^2/2 \end{aligned}$$

Exempel: $f(x) = \sin x$, $\bar{x} = 0$, $n = 3$

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin x &\approx 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (x - 0)^3 \\ &= x - x^3/6 \end{aligned}$$

* Definition: Taylor-polynom

n :e ordningens Taylor-polynom
för funktionen f runt punkten $\bar{x}$
ges av

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^k$$

* Definition: Maclaurin-polynom

Taylor-polynom med $\bar{x}=0$

* Sats: Taylor sats

Om funktionen f är $(n+1)$ gånger
deriverbar på $[\bar{x}, x]$ (eller $[x, \bar{x}]$)
så gäller att

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \quad x \in [\bar{x}, x]$$

där resttermen $E_n(x)$ ges av

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\bar{x})^{n+1}$$

$(\xi \in (\bar{x}, x))$

Notera:

- Medelvärdessatsen för $n=0$
- $E_n(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \bar{x}$
- Resttermen av samma typ som övriga termer

Lemma: Generaliserade medelvärdessatsen

Om f och g är kontinuerliga på $[a,b]$
och deriverbara på (a,b) , och
 $g'(x) \neq 0$ på (a,b) . Då gäller att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{Obs!} \\ \searrow \text{Samma } \xi! \end{matrix}$$

för något $\xi \in (a,b)$

Bevis: (ingår ej i kursen)

Låt

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)) \\ - (g(b) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a))$$

$$h(a) = h(b) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) \\ - (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \blacksquare$$

Notera:

Om $f(a) = g(a) = 0$ så gäller att

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (*)$$

Bevis: (Av Taylors sats)

Bevisidé: Matematisk induktion

(i) Visa att formeln gäller för $n=0$

(ii) Visa att om formeln gäller för $n=\bar{n}-1$,
så gäller den också för $n=\bar{n}$.

(iii) $\Rightarrow$ Gäller för alla $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$)

(i) $n=0$ ger

$$f(x) = P_0(x) + E_0(x)$$

$$= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\xi) \cdot (x - \bar{x})^1$$

$$= f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Medelvärdessatsen!

$\therefore$ Gäller för $n=0$.

(ii) Antag att formeln gäller
för $n = \bar{n} - 1$.

Vill visa att

$$E_{\bar{n}}[f](x) \equiv f(x) - \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^k = \frac{1}{(\bar{n}+1)!} f^{(\bar{n}+1)}\left(\xi\right) \cdot (x - \bar{x})^{\bar{n}+1}.$$

Använd formeln på funktionen f' :

$$E_{\bar{n}-1}[f'](x) \equiv f'(x) - \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^k = \frac{1}{\bar{n}!} f^{(\bar{n}+1)}\left(\xi\right) \cdot (x - \bar{x})^{\bar{n}}.$$

Notera:

$$E_{\bar{n}-1}[f'](x) = E'_{\bar{n}}[f](x),$$

$$\begin{aligned} \text{t.y. } \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) (x - \bar{x})^k &= \sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot k \cdot (x - \bar{x})^{k-1} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^{k-1} \\ &\quad \text{notera!} \\ &\quad \text{derivatan för } k=0 \text{ är } 0 \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\bar{x}) (x - \bar{x})^k \end{aligned}$$

Detta skall visas!

Detta är närliggande!
induktionsantagande!

Från vårt lemma (formeln (*)) följer att

$$\frac{E_{\bar{n}}[f](x)}{(x-\bar{x})^{\bar{n}+1}} = \frac{E'_{\bar{n}}[f](\eta)}{(\bar{n}+1) \cdot (\eta-\bar{x})^{\bar{n}}} = \frac{E_{\bar{n}-1}[f'](\eta)}{(\bar{n}+1) \cdot (\eta-\bar{x})^{\bar{n}}}$$

$$\Rightarrow E_{\bar{n}}[f](x) = (x-\bar{x})^{\bar{n}+1} \cdot \frac{1}{(\bar{n}+1) \cdot (\eta-\bar{x})^{\bar{n}}} \cdot \frac{1}{\bar{n}!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi) \cdot (\eta-\bar{x})^{\bar{n}}$$

$$= \frac{1}{(\bar{n}+1)!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi) \cdot (x-\bar{x})^{\bar{n}+1}.$$

$\therefore$ Formeln gäller för $n=\bar{n}$.

(iii) Med induktion följer att formeln gäller för

$$n=0, 1, 2, 3, \dots$$

Med hjälp av integraler och partiell integration kan man bevisa Taylors sats lite enklare...

