

* Idag: Taylors formel (forts. bevis)

Talföljder
F23 Serier

Adams / Essex 9.1-2

* Vi börjar med att avsluta beviset
 av Taylors sats - se anteckningar
 från F22!

* Definition: Egenskaper för talföljder

Givet en talföljd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

• Uppåt begränsad om

$$\exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M \quad \forall n$$

• Nedåt begränsad om

$$\exists L \in \mathbb{R}: x_n \geq L \quad \forall n$$

• Begränsad om uppåt och nedåt begränsad

• Positiv om

$$x_n \geq 0 \quad \forall n$$

• Negativ om

$$x_n \leq 0 \quad \forall n$$

• Växande om

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \quad \left(\begin{array}{l} \text{strikt växande} \\ \text{om } x_{n+1} > x_n \quad \forall n \end{array} \right)$$

• Avtagande om

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \quad \left(\begin{array}{l} \text{strikt avtagande} \\ \text{om } x_{n+1} < x_n \quad \forall n \end{array} \right)$$

• Monoton om antingen växande eller avtagande

• Alternande om

$$x_n x_{n+1} < 0 \quad \forall n$$

Exempel: Talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

är begränsad och alternerande

* Definition: Konvergent talföljd

(Repetition!)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot gränsvärdet $\bar{x}$

om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

* Definition: Slutligt värde (avtagande)

$\exists N_0$: värde för $n \geq N_0$

$\exists N_0$: avtagande för $n \geq N_0$

* Sats: Om konvergenta talföljder

(i) Konvergent $\Rightarrow$ begränsad

(ii) Uppåt begränsad och (slutligt) värde
 $\Rightarrow$ konvergent

(iii) Nedåt begränsad och (slutligt) avtagande
 $\Rightarrow$ konvergent

Beris: (av (i))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \exists N > 0 : n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n| = |x_n - \bar{x} + \bar{x}|$$

$$\leq |\bar{x}| + |x_n - \bar{x}|$$

$$\leq |\bar{x}| + 1 \quad \text{för } n \geq N(1)$$

$$\Rightarrow |x_n| \leq \underbrace{\max(|\bar{x}| + 1, a_1, a_2, \dots, a_{N(1)-1})}_{=M} \quad \forall n$$

Notera: (ii) + (iii) följer från fullständighetsegenskapen (axiom) för $\mathbb{R}$. Kan också visas med Cauchy-följder, men det beviset blir en smula invecklat.

* Definition: Serie

En serie är en oändlig summa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

för någon talföljd. Värdet av serien

är

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k}_{\text{delsumma } s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Om gränsvärdet existerar (dvs om s_n är en konvergent talföljd) så är serien konvergent, annars divergent.

Notera:

Talföljd = "sequence"

Serie = "series"

* Exempel på serierGeometrisk serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k \quad (\text{konvergent om } |r| < 1)$$

Harmonisk serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\text{divergent})$$

Teleskopserier

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{=0} + \underbrace{x_4 + x_5}_{=0} + x_6 + \dots$$

Potensserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \bar{x})^k \quad (\text{Taylor-serie!})$$

Binomialserie

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

(Fourier-serie:)



Mycket viktig serie
men ligger utanför
kursen!

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$