

* Idag: Konvergenstester
för serier

F24

* När konvergerar en serie?

Använd konvergenstester tillsammans
med kända serier.

Konvergenstester: (verktygslåda)

- Term-test
 - Konvergens eller divergens
 - (Integraltest)
 - Jämförelsetest I + II
 - Kvottest
 - (Rottest)
 - Absolutkonvergens
 - Alternande serie
- } För positiva serier

Kända serier:

• Geometrisk serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$$

konvergerar mot $\frac{1}{1-r}$ om $|r| < 1$
(annars divergent)

Detta visade vi i samband med Banachs fixpunktsats!

• Harmonisk serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

divergent! (Följer från integraltest och $\ln \infty = \infty$)

• p-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerar om $p > 1$

* Några viktiga definitioner innan vi presenterar konvergenstesterna:

Definition: Absolutkonvergent

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent om serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

Definition: Villkorligt konvergent

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är villkorligt konvergent om den är konvergent men inte absolutkonvergent.

* Sats: Term-test

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Bevis:

$$a_n = \sum_{n=1}^n a_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$$

$$\text{ty } S_n \rightarrow S \text{ och } S_{n-1} \rightarrow S.$$



Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \text{ divergerar, ty } \ln n \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergerar, trots att } \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

* Sats: Konvergens eller divergens

En positiv serie är antingen konvergent eller divergerar mot ∞ .

Beris:

Om serien ej divergerar mot ∞ så är talföljden $\{s_n\}$ uppåt begränsad och växande, och därmed konvergent. 

* Sats: Jämförelsetest I

Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är två talföljder och (slutligen) $0 \leq a_n \leq K b_n$ för något $K > 0$, så gäller att $\uparrow$ (således slutligt positiva)

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerar}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar mot } +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerar mot } +\infty$$

(Beris)

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \text{ konvergent, t.ex.}$$

$$\frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ är konvergent geometrisk serie}$$

* Sats: Jämförelsetest II

Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva talföljder och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

där $L \in [0, \infty)$ eller $L = +\infty$, så:

(i) $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar}$$

(ii) $L > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar}$$

(Bevis)

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \text{ konvergerar?}$$

Jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ som divergerar.

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} \quad (p\text{-serie med } p = \frac{1}{2})$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/(1+\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \rightarrow 1$$

Jämförelsetest II ger att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ divergerar.

* Sats: Krootlest

Om $\{a_n\}$ är (slutligt) positiv
och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

där $\rho \in [0, \infty)$ eller $\rho = +\infty$, så:

(i) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(ii) $1 < \rho \leq \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ och} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar mot } \infty \end{cases}$

(iii) $\rho = 1 \Rightarrow$ antingen konvergent eller divergent

Bevis: (av (i))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \rho < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1 \text{ för något}$$

r då $n \geq N$ för något N

(tag $N = N(\epsilon)$ för $\epsilon = (1 - \rho)/2$)

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \cdot r$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^M a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^M a_n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=N}^M a_{N-1} \cdot r^{n-N}}_{\text{Geometrisk serie, konvergent, ty } |r| < 1.}$$

$\Rightarrow$ Konvergent enligt jämförelsetest I.



* Sats: Absolutkonvergenstest

Absolutkonvergens $\Rightarrow$ konvergens

* Sats: Alternuerande test

Om för något $N > 0$

$$(i) a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \geq N$$

$$(ii) |a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n \geq N$$

$$(iii) a_n \rightarrow 0$$

så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Dessutom:

$$|s - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

* Notera: Om termerna i en absolutkonvergent serie flyttas om så konvergerar serien mot samma sak.

Termerna i en villkorligt konvergent serie kan flyttas runt så att den divergerar.

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$$

Utred konvergens, absolutkonvergens och villkorlig konvergens för olika x !

$$a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$$

- Ofta bra att börja med kvottest för att testa absolutkonvergens:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|(x-5)^{n+1}/((n+1) \cdot 2^{n+1})|}{|(x-5)^n/(n \cdot 2^n)|} = |x-5| \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = |x-5| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{|x-5|}{2} = \rho$$

Enligt kvottestet

$\Rightarrow$ Absolutkonvergent för $\frac{|x-5|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$.
(Därför också konvergent då $3 < x < 7$.)

- Om $x < 3$ eller $x > 7$ får vi

$$|a_n| = \frac{|x-5|^n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{|x-5|}{2}\right)^n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ Divergent för $x < 3$ eller $x > 7$ enligt termtestet.

- Kvar att undersöka: $x=3$, $x=7$

$$x=3 \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{Villkorligt konvergent enligt } \underline{\text{alternierende test}} \text{ (ty ej absolutkonvergent)}$$

$$x=7 \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Divergent enligt } \underline{p\text{-serie}} \text{ för } p=1$$

- Slutsats: Absolutkonvergent (och därmed konvergent) på $(3,7)$, villkorligt konvergent i $x=3$, divergent överallt annars.