

* Idag: Repetition (Obs! Ej heltäckande!)

F26 (F7-25)

Adams/Essex 1-4, 9

BM 1-6

* Gränsvärden, kontinuitet

Def. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

- Givet ε - bestäm δ
- $\delta = \delta(\varepsilon)$
- Sats: Räkeregler (summa, produkt, ...)
- Ensidigt gränsvärde, gränsvärde i ∞

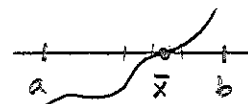
Def. Kontinuitet: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

- Vänster/höger-kontinuitet
- Sats: Egenskaper (summa, produkt, ...)
- Kontinuerlig extension

* Lipschitz-kontinuitet 

Def. $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f \cdot |x_1 - x_2|$

- Sats: Lipschitz $\Rightarrow$ kontinuitet
- Sats: Lipschitz $\Rightarrow$ begränsad
- Sats: Egenskaper (summa, produkt, ...)

* Bisektionsalgoritmen 

Def. Konvergent talföljd

$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : i \geq N \Rightarrow |x_i - x| < \varepsilon$

Def. Cauchy-följd

$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon$

- Reella tal "= $\equiv$ Cauchy-följder
- Bisektionsalgoritmen
- Sats: Konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy
- Sats: Bolzaños sats
- Sats: Mellanliggande värden

* Fixpunktsiteration

- Iteration: $x_n = g(x_{n-1})$
- Fixpunkt: $x = g(x)$
- Omskrivning: $f(x) = 0$

$$x = x + \underbrace{\alpha f(x)}_{g(x)}$$

Def. Kontraktion $g : L_g < 1$

- Sats: Konvergerar om kontraktion
(Banachs fixpunktsats)
- $L_g = \max_x |g'(x)|$
- Bra val av α :

$$\alpha = -\frac{1}{f'(x)}$$

Newton's metod!

* Flyttal

- Exponentform $x = m \cdot b^e$
- Mantissa, bas, exponent
- Talsystem ($b = 2, 10, 16$)
- IEEE 754, "double", ~16 decimaler
- $\epsilon_{mach} \approx 2 \cdot 10^{-16}$

* Derivata

Def. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- Sats: Räkneregler (summa, produkt, ...)
- Sats: Kedjeregeln
- Derivator av trigonometriska funktioner
- Implicit derivering
- Numerisk derivata: $h \sim \sqrt{\epsilon_{mach}}$

* Medelvärdessatsen, linearisering

Medelvärdessatsen

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\bar{x}), \quad \bar{x} \in (a, b) \\ (2) f(b) - f(a) = f'(\bar{x}) \cdot (b - a) \\ (3) f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x}) \end{array} \right.$$

Linearisering:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

* Newtons metod

$$\text{Lös } f(x) = 0$$

Fixpunktiteration:

$$x_n = x_{n-1} - \underbrace{\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}_{g(x_{n-1})}$$

- Härledning av Newton från linearisering
- Linjär konvergens, kvadratisk konvergens

* Inversa funktioner, $\exp$, $\ln$, arctusfunktioner

Def. Injektiv, surjektiv, bijektiv, invers

Def. $\ln x$, $\exp x$, e , a^x , e^x

- Sats: Egenskaper för $\ln$
- Sats: Egenskaper för $\exp$
- Arcusfunktionerna: $\arcsin = \sin^{-1} [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
 $\arccos = \cos^{-1} [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
 $\arctan = \tan^{-1} [-\infty, \infty] \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

* Mer om derivator

- Relaterade hastigheter
- L'Hôpital's regler
- Extremvärdesproblem

Extremvärde: min / max

Lokalt / globalt

Kritisk punkt, singular punkt

- Konkav uppåt / nedåt, konvex
- Inflexionspunkt

* Taylors formel

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) (x - \bar{x})^k$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \bar{x})^{n+1}$$

- Matematisk induktion

* Talföljder, serier

- Uppåt begr., nedåt begr., positiv, växande, avtagande, monoton, alternerande, slutligt

- Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Delsumma, konvergens

- Absolutkonvergent, villkorligt konvergent

* Kända serier:

Geometrisk serie $\sum r^n, r < 1$

p-serie $\sum n^{-p}, p > 1$

* Konvergenstester

Termtestet

Jämförelsetest I + II

Kvottestet

Absolutkonvergens

Alternerande test

* Potensserier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \bar{x})^n$$

- Sats: Konvergensradie, centrum

- Sats: Egenskaper (summa, derivata)

- Taylorserie, analytiska funktioner.

